J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
4 (1970) 383-424

MÉTRIQUES RIEMANNIENNES ET COURBURE

THIERRY AUBIN

Introduction

Nous allons étudier certains changements de métrique sur les variétés Riemanniennes, et examiner dans quelle mesure, on peut modifier les propriétés de la courbure. Un problème fondamental de la géométrie différentielle est de déduire, à partir des propriétés du tenseur de courbure, des propriétés topologiques pour la variété, et même si possible d'identifier la variété comme homéomorphe à une variété connue. Les résultats de ce type sont trés nombreux.

D'après le théorème de Whitney, sur une variété C^∞ il existe une métrique C^∞: g. Dans un système de coordonnées locales, à partir de l'expression des composantes g_{ij} du tenseur métrique, on peut calculer les composantes du tenseur de courbure. Mais il y a peu de chance pour que les propriétés de ce tenseur de courbure puissent -être exploitées directement par un des nombreux théorèmes existant.

Aussi peut-on penser déformer la métrique initiale de manière à ce que les propriétés du tenseur de courbure ou de ses contractés soient plus agréables. Certaines propriétés de la courbure ont une signification topologique, bien souvent un exemple la met en évidence. Mais là où nous n'avons aucun exemple montrant le caractère topologique de la propriété envisagée, on peut penser que cette propriété n'a pas d'implication topologique, et pour le montrer il suffit de construire sur toute variété Riemannienne une métrique dont la courbure ait la propriété envisagée.

Dans une première partie, on étudie localement les changements de métrique: à l'intérieur d'une boule de petit rayon on modifie la métrique sans rien changer à l'extérieur. Cette méthode permet d'établir des résultats sur la courbure scalaire, la courbure de Ricci et la courbure conforme. En considérant le changement de métrique $g'_{ij} = g_{ij} + \partial_i\varphi\partial_j\varphi$ avec $\varphi \in C^\infty$, on montre que sur toute variété riemannienne compacte de dimension supérieure à deux, il existe une métrique dont la courbure scalaire est négative. Grâce à un changement de métrique du même type, on montre que sur toute variété Riemannienne il existe une métrique pour laquelle le carré du tenseur de

Communicated by A. Lichnerowicz, December 5, 1967, and, in revised form, May 6, 1969.

courbure conforme est constant. Des résultats analogues pourraient être établis sur les carrés du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci.

Puis en utilisant des changements de métriques conformes, on montre en particulier qu'une variété à courbure de Ricci positive ou nulle et positive en un point admet une métrique à courbure de Ricci partout positive.

Si on suppose que deux propriétés de la courbure ont les mêmes implications topologiques, on devrait pouvoir à l'aide de changements de métriques locaux, passer d'une métrique ayant la 1ère propriété à une métrique ayant la 2ème propriété. C'est ainsi que pour montrer les limites de la méthode, on est amené à étudier en toute généralité les changements locaux de métriques.

Dans une seconde partie, pour obtenir des résultats plus fins, on considère des changements globaux de métriques, et on envisage des problèmes géométriques qui peuvent se ramener à montrer l'existence d'une solution acceptable d'une équation différentielle du type $A(\varphi) = \text{Cte}$. La solution doit être acceptable: en effet à la fonction φ est attaché un changement de métrique $g'_{ij} = g_{ij} + h_{ij}(\varphi)$, φ est acceptable si g'_{ij} est C^∞ défini positif. Pour aborder ce genre de problémes, on utilise la méthode suivante: Considérons une expression de la forme $I(\varphi) = \int_V \{\Gamma[A(\varphi)]\}dV$ où Γ est une fonction de A, et la borne inférieure de $I(\varphi)$ lorsque φ parcourt un ensemble de fonctions acceptables. Il s'agit de montrer que la borne inférieure est atteinte par une fonction acceptable, puis que $A(\varphi)$ est constant.

Dans les cas favorables le minimum sera atteint, dans d'autres cas, il faudra faire des hypothèses sur la courbure. Quant à démontrer que $A(\varphi)$ est constant, cela revient dans bien des cas, à écrire qu'une certaine équation linéaire [adj. partie lineaire en Ψ de $A(\varphi + \Psi) = 0$] n'a pas de solution en Ψ autre que la solution constante.

Cette méthode de résolution d'équations différentielles est utilisée pour des problémes sur la 1ère classe de Chern des variétés kähleriennes compactes, en considérant le changement de métrique $g'_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi$ avec φ C^∞ admissible.

L'un des théorèmes est une étape pour la démonstration de la conjecture de Calabi: Moyennant une hypothèse sur la courbure, on montre que sur toute variété kählerienne compacte, un élément de la 1ère classe de Chern est forme de Ricci pour une certaine métrique.

Pour des raisons d'analyse, la démonstration incite à faire une conjecture plus faible que celle de Calabi: Tout élément de la 1ère classe de Chern pourrait être approché aussi près qu'on veut (au sens de la métrique initiale) par une forme de Ricci.

Mais cette méthode de résolution d'équations différentielles peut s'appliquer à bien d'autres problèmes, le choix de la fonction Γ, la limitation de l'espace des fonctions acceptables offrent bien des possibilités.

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans l'attention toute particulière que le

Professeur Lichnerowicz a bien voulu porter à mon travail. Combien de fois aurais-je désespéré, combien de fois me serais-je égaré dans quelques recherches stériles sans ses conseils.

Je suis très heureux de pouvoir lui témoigner toute ma reconnaissance. Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude au Professeur Calabi et au Professeur Avez qui m'ont consacré beaucoup de leur temps. J'ai pu ainsi grâce à leurs remarques améliorer mes démonstations. Je remercie également le Professeur Schwartz de l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury de cette thèse.

PREMIÈRE PARTIE

1. Métriques conformes

V_n désigne une variété à n dimensions de classe C^∞. Soit g_{ij} une métrique de classe C^∞ sur V_n. A toute fonction $f \in C^\infty$, on fait correspondre la métrique conforme $g'_{ij} = e^f g_{ij}$. R'_{ij} et R' désignant le tenseur de Ricci et la courbure scalaire relatifs à la métrique g'_{ij}:

$$R'_{ij} = R_{ij} - \frac{n-2}{2}\nabla_i\nabla_j f + \frac{n-2}{4}\nabla_i f\nabla_j f - \frac{1}{2}\left(\nabla^\nu\nabla_\nu f + \frac{n-2}{2}\nabla^\nu f\nabla_\nu f\right)g_{ij} ,$$

$$R' = e^{-f}\left[R - (n-1)\nabla^\nu\nabla_\nu f - \frac{(n-1)(n-2)}{4}\nabla^\nu f\nabla_\nu f\right] .$$

Cette derniere expression montre que, sur une variété riemannienne compacte, si deux métriques ont chacune une courbure scalaire constante: R et R' sout égaux ou de même signe. En effect, soit dV et dV' les éléments de volume relatifs aux métriques g_{ij} et g'_{ij}:

$$\int_V R'e^f dV = \int_V R dV - \frac{(n-1)(n-2)}{4}\int_V \nabla^\nu f\nabla_\nu f dV ,$$

$$\int_V R'dV' = \int_V e^{-f}RdV' + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\int_V e^{-f}\nabla^\nu f\nabla_\nu f dV' .$$

a) $R = 0$, la 2ème égalité montre que $\int_V R'dV' \geq 0$ pour toute métrique conforme à g_{ij}. Si R' est constant la 1ère égalité montre que $R' \leq 0$, donc $R' = 0$ et la métrique g'_{ij} est proportionnelle à g_{ij} (f est constant).

b) R positif, la 2ème égalité montre que $\int_V R'dV' > 0$ pour toute métrique conforme. Donc si R' est constant, R' est positif.

c) R constant négatif, d'après ce qui précède si R' est constant, R' est négatif. De plus on peut choisir une métrique proportionnelle à g'_{ij} de manière que $R' = R$.

Alors:

$$R(1 - e^f) = (n-1)\nabla^\nu\nabla_\nu f + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\nabla^\nu f\nabla_\nu f\,.$$

En un point où f est maximum $\nabla^\nu\nabla_\nu f \leq 0$ ce qui entraîne R étant négatif $f \leq 0$. En un point où f est minimum $\nabla^\nu\nabla_\nu f \geq 0$ d'où $f \geq 0$. Donc $f = 0$. Les métriques pour lesquelles R est constant et négatif sout proportionnelles.

Pour les variétés riemanniennes compactes de dimension $n \geq 3$, Yamabe [16], [15] a démontré que, parmi les métriques conformes à une métrique initiale, il existe une métrique pour laquelle la courbure scalaire est soit constante négative ou nulle, soit partout positive.

Théorème. *Si pour u ne métrique conforme á la métrique initiale* $\int_V R'dV' < 0$, *il existe une métrique conforme et une seule qui a sa courbure scalaire égale à une constante négative déterminée, il n'existe pas de métrique conforme ayant sa courbure scalaire positive ou nulle, constante ou non. Si pour toutes les métriques conformes à la métrique initiale* $\int_V R'dV' \geq 0$, *l'égalité n'est atteinte, que par des métriques proportionnelles qui ont leur courbure scalaire nulle. Et il n'existe pas d'autre métriques conforme ayant une courbure scalaire constante.*

2. Etude d'un changement de métrique particulier

Soit le changement de métrique défini par $g'_{ij} = g_{ij} + \partial_i f\partial_j f$ avec $f \in C^\infty$, $|g'|$ désignantion le déterminant de la matrice $\{g'_{ij}\}$, un simple calcul donne:

$$|g'| = |g|\,(1 + \nabla^\nu f\nabla_\nu f)\,,$$
$$(1 - g'^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\partial_\beta f)(1 + \nabla^\nu f\nabla_\nu f) = 1\,,$$
$$g'^{ij} = g^{ij} - \nabla^i f\nabla^j f/(1 + \nabla^\nu f\nabla_\nu f)\,,$$

g'^{ij} étant defini par le systeme $g'^{ij}g'_{ik} = \delta^j_k$.

Designons par R'_{ijkl} et $\Gamma'^{\cdot}_{i\alpha k}$ le tenseur de courbure et les symboles de Christoffel de la métrique g'_{ij}:

$$R'_{ijkl} = \tfrac{1}{2}(\partial_{jk}g'_{il} + \partial_{il}g'_{jk} - \partial_{ik}g'_{jl} - \partial_{jl}g'_{ik}) + g'^{\alpha\beta}(\Gamma'_{j\alpha k}\Gamma'_{i\beta l} - \Gamma'_{i\alpha k}\Gamma'_{j\beta l})\,.$$

Faisons les calculs en coordonnées normales pour la métrique:

$$\Gamma'_{j\alpha k} = \tfrac{1}{2}[\partial_j(\partial_\alpha f \partial_k f) + \partial_k(\partial_\alpha f \partial_j f) - \partial_\alpha(\partial_j f \partial_k f)] = \partial_\alpha f \partial_{jk} f \ ,$$
$$R'_{ijkl} - R_{ijkl} = (\partial_{ik} f \partial_{lj} f - \partial_{jk} f \partial_{il} f)(1 - g'^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f) \ .$$

Sous forme invariante:

$$R'_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{\nabla_{ik} f \nabla_{lj} f - \nabla_{jk} f \nabla_{il} f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f} \ ,$$

où on pose pour simplifier l'écriture $\nabla_{ik} f = \nabla_i \nabla_k f$,

$$R'_{ik} = R_{ik} - \frac{R_{i\alpha k\beta}\nabla^\alpha f \nabla^\beta f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f} + \frac{\nabla^\nu_\nu f \nabla_{ik} f - \nabla_{k\nu} f \nabla^\nu_i f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f}$$
$$- \frac{\nabla_{ik} f \nabla^\nu f \nabla_{\nu\mu} f \nabla^\mu f - \nabla_{k\nu} f \nabla^\nu f \nabla^\mu f \nabla_{i\mu} f}{(1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f)^2} \ ,$$
$$R' = R - 2\frac{R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha f \nabla^\beta f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f} + \frac{(\nabla^\nu_\nu f)^2 - \nabla_{\nu\mu} f \nabla^{\nu\mu} f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f}$$
$$- 2\frac{\nabla^\lambda_\lambda f \nabla^\nu f \nabla_{\nu\mu} f \nabla^\mu f - \nabla^\nu f \nabla_{\nu\mu} f \nabla^{\mu\lambda} f \nabla_\lambda f}{(1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f)^2} \ .$$

Remarquons que:

$$R' = R - \frac{R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha f \nabla^\beta f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f} + \nabla^\lambda\left(\frac{\nabla^\nu_\nu f \nabla_\lambda f}{1 + \nabla^\mu f \nabla_\mu f}\right) - \nabla^\lambda\left(\frac{\nabla_{\lambda\mu} f \nabla^\mu f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f}\right).$$

D'où

$$\int_V R' \, dV = \int_V R \, dV - \int_V \frac{R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha f \nabla^\beta f}{1 + \nabla^\nu f \nabla_\nu f} dV \ ,$$

dV etant l'élément de volume de la métrique g_{ij}.

3. Application à la courbure scalaire

Dans ce paragraphe n désignera un entier supérieur ou égal à 3.

Lemma 1. *S'il existe une fontion positive u, sur une variété V_n compacte, telle que pour la métrique g_{ij}:*

$$\int_V R u^2 \, dV + 4\frac{n-1}{n-2}\int_V \nabla^\nu u \nabla_\nu u \, dV < 0 \ ,$$

il existe une métrique conforme à g_{ij} et une seule pour laquelle la courbure scalaire est une constante négative déterminée.

Démonstration. Considérons la métrique conforme $g'_{ij} = u^{4/(n-2)} g_{ij}$. Les quantités (′) sont relatives à la métrique g'_{ij}. D'après les calculs du paragraphe 1:

$$R' = u^{-4/(n-2)}\left(R - 4\,\frac{n-1}{n-2}\,\frac{\nabla^\nu_\nu u}{u}\right),$$

$$\int_V R'\,dV' = \int_V R'\,u^{2n/(n-2)}\,dV = \int_V Ru^2\,dV + 4\frac{n-1}{n-2}\int_V \nabla^\nu u\nabla_\nu u\,dV < 0\ .$$

D'après le théorème du paragraphe 1, il existe une métrique conforme et une seule ayant pour courbure scalaire une constante négative déterminée.

Lemme 2. *Sur une variété V_n compacte, s'il existe une fonction φ telle que pour une métrique g_{ij}:*

$$(*)\qquad \begin{aligned}&\int_V R\,dV - \int_V \frac{R_{ij}\nabla^i\varphi\nabla^j\varphi}{1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi}\,dV\\ &\quad+\frac{n-1}{n-2}\int_V\left[\frac{\nabla^\nu\varphi\nabla_{\nu\mu}\varphi\nabla^\mu_\lambda\varphi\nabla^\lambda\varphi}{(1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^2} - \frac{(\nabla_{\lambda\mu}\varphi\nabla^\lambda\varphi\nabla^\mu\varphi)^2}{(1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^3}\right]dV < 0\ ,\end{aligned}$$

il existe une métrique conforme à la métrique $g'_{ij} = g_{ij} + \partial_i\varphi\partial_j\varphi$, et une seule pour laquelle la courbure scalaire est une constante négative donnée.

Démonstration. Appliquons le lemme 1 a la métrique g'_{ij} avec $u = (1 + \nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^{-1/4}$. Pour qu'il existe une métrique g''_{ij} conforme à la métrique g'_{ij}, telle que la courbure scalaire R'' soit une constante négative, il suffit que:

$$\begin{aligned}&\int_V \frac{R'dV'}{(1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^{1/2}} + 4\frac{n-1}{n-2}\int_V \partial_\lambda(1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^{-1/4}\partial_\mu(1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^{-1/4}\\ &\qquad\qquad\times\left(g^{\lambda\mu} - \frac{\nabla^\lambda\varphi\nabla^\mu\varphi}{1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi}\right)dV' < 0\ .\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit car $dV' = (1 + \nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^{1/2}dV$ (cf. paragraphe 2):

$$\begin{aligned}&\int_V R'\,dV + \frac{n-1}{n-2}\int_V \nabla^\nu\varphi\nabla_{\lambda\nu}\varphi\nabla^\rho\varphi\nabla_{\mu\rho}\varphi\\ &\qquad\qquad\times\left(g^{\lambda\mu} - \frac{\nabla^\lambda\varphi\nabla^\mu\varphi}{1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi}\right)\frac{dV}{(1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi)^2} < 0\ .\end{aligned}$$

Mais

$$\int_V R'\,dV = \int_V R\,dV - \int_V \frac{R_{ij}\nabla^i\varphi\nabla^j\varphi}{1+\nabla^\nu\varphi\nabla_\nu\varphi}\,dV \qquad \text{(cf. paragraphe 2)}\ .$$

D'où l'inégalité s'écrit $(*)$.

Théorème [1]. *Une variété riemannienne compacte V_n de dimension $n \geq 3$*

possède une métrique pour laquelle la courbure scalaire est une constante négative.

Soit g_{ij} une métrique pour laquelle la courbure scalaire R est positive ou nulle. Nous savous qu'il n'existe pas de métrique conforme à g_{ij} dont la courbure scalaire soit constante et négative. Mais nous allons mettre en évidence une fonction positive $\phi \in C^\infty$ et une constante positive $k > 1$, telles qu'il existe une métrique conforme à la métrique $g_{ij} + 4\partial_i(k\sqrt{\phi})\partial_j(k\sqrt{\phi})$ dont la courbure scalaire est constante et négative.

Démonstration. Posons $g'_{ij} = \phi g_{ij}$ et $g''_{ij} = \phi g_{ij} + k^2\partial_i\phi\partial_j\phi$. Ecrivons que le lemme 2 s'applique à la métrique g'_{ij} en utilisant comme fonction φ, la fonction $k\phi$.

Posons $f = \phi^{(n-2)/2}$, nous garderons simultanément les notations ϕ et f pour simplifier l'écriture. Soit

$$\Phi_V = \int_V \left(R' - \frac{R'_{ij}\nabla'^i\phi\nabla'^j\phi}{1/k^2 + \nabla'^\nu\phi\nabla'_\nu\phi}\right)dV' + \frac{n-1}{n-2}\int_V \left[\frac{\nabla'^\nu\phi\nabla'_{\nu\mu}\phi\nabla'^{\mu\lambda}\phi\nabla_\lambda\phi}{(1/k^2 + \nabla'^\nu\phi\nabla'_\nu\phi)^2} - \frac{(\nabla'_{\nu\mu}\phi\nabla'^\mu\phi\nabla'^\nu\phi)^2}{(1/k^2 + \nabla'^\nu\phi\nabla'_\nu\phi)^3}\right]dV' .$$

Il suffit pour établir le théorème de montrer que pour une certaine fonction $\phi > 0$ et une certaine constante k, $\Phi_V < 0$. Faisons les calculs dans la métrique g_{ij}:

$$R'_{ij} = R_{ij} - \frac{\nabla_{ij}f}{f} + \frac{n-1}{n-2}\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f^2} - \frac{1}{n-2}\frac{\nabla^\nu_\nu f}{f}g_{ij} ,$$

$$R' = \frac{1}{\phi}\left(R - 2\frac{n-1}{n-2}\frac{\nabla^\nu_\nu f}{f} + \frac{n-1}{n-2}\frac{\nabla^\nu f\nabla_\nu f}{f^2}\right) ,$$

$$dV' = f\phi dV, \nabla'_{\nu\mu}\phi = \nabla_{\nu\mu}\phi - \frac{1}{\phi}(\nabla_\nu\phi\nabla_\mu\phi - \tfrac{1}{2}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi g_{\nu\mu}) ,$$

$$\nabla'_{\nu\mu}\phi\nabla^\nu\phi = \nabla_{\nu\mu}\phi\nabla^\nu\phi - \frac{1}{2\phi}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi\nabla_\mu\phi ,$$

$$\begin{aligned}\Phi_V = &\int_V \left(R - \frac{R_{ij}\nabla^i\phi\nabla^j\phi}{\phi/k^2 + \nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi}\right)fdV + \int_V \frac{\nabla_{ij}f\nabla^i\phi\nabla^j\phi}{\phi/k^2 + \nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi}dV \\ &+ \frac{n-1}{n-2}\int_V \frac{\nabla^\nu f\nabla_\nu f}{f}dV - \frac{n-1}{n-2}\int_V \frac{(\nabla^\nu\phi\nabla_\nu f)^2}{f(\phi/k^2 + \nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi)}dV \\ &+ \frac{1}{n-2}\int_V \frac{\nabla^\nu_\nu f\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi}{\phi/k^2 + \nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi}dV \\ &+ \frac{n-1}{n-2}\int_V \left[\frac{\nabla^\nu\phi\nabla^\mu_\nu\phi\nabla^\lambda_\mu\phi\nabla_\lambda\phi}{(\phi/k^2 + \nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi)^2} - \frac{(\nabla_{\lambda\mu}\phi\nabla^\lambda\phi\nabla^\mu\phi)^2}{(\phi/k^2 + \nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi)^3}\right]fdV \\ &+ \frac{1}{k^2}\frac{n-1}{n-2}\int_V \frac{\frac{1}{4}(\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi)^3 - \nabla_\nu\phi\nabla^\nu\phi(\nabla_{\lambda\mu}\phi\nabla^\lambda\phi\nabla^\mu\phi)\phi}{(\phi/k^2 + \nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi)^3}fdV .\end{aligned}$$

Pour simplifier on peut remarquer que:

$$\int_V \frac{\nabla^\nu f \nabla_\nu f}{f} dV - \int_V \frac{(\nabla^\nu \phi \nabla_\nu f)^2}{f(\phi/k^2 + \nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi)} dV = \frac{n-2}{2} \int_V \frac{\nabla^\nu \phi \nabla_\nu f}{\phi + k^2 \nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi} dV ,$$

$$\int_V \frac{\nabla^\nu_\nu f \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi}{\phi/k^2 + \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi} dV = -\frac{1}{k^2} \int_V \frac{\phi \nabla^\nu_\nu f}{\phi/k^2 + \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi} dV .$$

Soit $y(x)$ une fonction C^∞ telle que $y(-x) = y(x)$; $y(x) = 1$ pour $|x| \geq 1$; $y(x) > 0$; $y'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$ et $y'(x) \geq 1$ pour $\sqrt[n-1]{1/4} \leq x \leq \sqrt[n-1]{3/4}$. La fonction $y(x)$ est choisie, nous n'en changerons plus.

Soit M un point de V et un système de coordonnées normales géodésiques polaires en M: $\rho, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$. $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\rho i} = 0$, $g_{ij} = \delta_{ij} + \rho^2 a_{ij}$, $g^{\rho\rho} = 1$ ($i = 1, \cdots, n-1$ et correspond aux coordonnées φ_i). Les a_{ij} sont des quantités de l'ordre de 1.

Considérous une boule $B(r)$ de rayon $r < r_0$, centrée en M (r_0 étant suffisamment petit pour que, quelque soit $M \in V$, $B(r_0)$ existe). A l'intérieur de la boule $B(r)$ nous prendrous $f(M') = y(\rho/r)$, ρ étant la distance de M à M' au sens de la métrique g_{ij}. Soit $\Phi_{B(r)}$ l'intégrale précédente étendue seulement à la boule $B(r)$.

Etudious $\Phi_{B(r)}$ au voisinage de $r = 0$, k étant tres grand:

$$\Phi_{B(r)} = \int_{B(r)} (R - R_{\rho\rho}) y dV + \frac{1}{r^2} \int_{B(r)} y'' dV + \frac{1}{k^2} \phi_1 .$$

ϕ_1 est une fonction continue de $1/k$ et de r pour $0 < r \leq r_0$ et $0 \leq 1/k < 1$. Comme $y'(1) = 0$:

$$\Phi_{B(r)} = \int_{B(r)} (R - R_{\rho\rho}) y dV - \frac{1}{r} \int_{B(r)} y' \partial_\rho \operatorname{Log} \sqrt{|g|}\, dV$$
$$- \frac{n-1}{r} \int_{B(r)} \frac{y'}{\rho} dV + \frac{1}{k^2} \phi_1 .$$

Il existe une constante Y telle que pour $\forall M \in V$

$$\int_{B(r)} (R - R_{\rho\rho}) y dV - \frac{1}{r} \int_{B(r)} y' \partial_\rho \operatorname{Log} \sqrt{|g|}\, dV \leq Y V_r \text{ avec } V_r = \int_{B(r)} dV .$$

Il existe M étant fixé une fonction continue de r pour $0 < r \leq r_0$, $\phi_M(r)$ telle que:

$$\phi_1(M, 1/k, r) \leq \phi_M(r) .$$

D'après les propriétés de la fonction y, on a, pour $0 < r \leq r_0$,

$$\Phi_{B(r)} \leq YV_r + \frac{1}{k^2}\phi_M(r) - \frac{n-1}{r}s_{n-1}\inf_V \sqrt{|g|}\int_{{}^{n-1}\sqrt{1/4}\,r}^{{}^{n-1}\sqrt{3/4}\,r} p^{n-2}dp \ .$$

Il existe une constante positive λ telle que

$$\Phi_{B(r)} \leq YV_r + \frac{1}{k^2}\phi_M(r) - \frac{\lambda}{r^2}V_r \ .$$

Soit r_1, tel que $\lambda/r_1^2 - Y - 1 = \nu\bar{R}$, en pasant $\int_V RdV = \bar{R}dV$, ν étant une constante telle que le volume de la sphère à n dimensions de rayon 1 soit largement supérieur à $1/\nu$. Soit B_j $(j = 1, \cdots, h)$, h boules disjointes de rayon r_1 de manière que $\sum_{j=1}^{h} V_{r_1}(M_j) > \frac{1}{\nu}\int_V dV$, M_j étant le centre de B_j. Cela est possible car ν est suffisamment grand. Puis dans chaque boule B_j nous prendrous $k^2 = \sup_{j=1,\cdots,h} \frac{\phi_{M_j}(r_1)}{V_{r_1}(M_j)}$. Si la quantité ainsi définie était inférieur à 1 on prendrait $k^2 = 1$. Ainsi comme pour $\forall j$:

$$\Phi_{B_j(r_1)} \leq -\nu\bar{R}V_{r_1}(M_j) - V_{r_1}(M_j) + \frac{1}{k^2}\phi_{M_j}(r_1) \leq -\nu\bar{R}V_{r_1}(M_j) \ ,$$

$$\Phi_V < \bar{R}\int_V dV - \nu\bar{R}\sum_{j=1}^{h} V_{r_1}(M_j) \leq 0 \ .$$

La variété V_n, $n \geq 3$, étant munie de la métrique g_{ij} à courbure scalaire R positive ou nulle, nous avous mis en évidence une fonction ϕ et un scalaire k, tels que parmi les métriques conformes à la métrique $g''_{ij} = \phi g_{ij} + k^2\partial_i\phi\partial_j\phi$, il existe une métrique pour laquelle la courbure scalaire est une constante négative.

4. Application à la courbure conforme

Le tenseur de courbure conforme est le tenseur de composantes:

$$S_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il})$$
$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{jk}g_{il}) \ .$$

Posons $(S)^2 = S_{ijkl}S^{ijkl}$. Sur les variétés de dimension 3, $(S)^2 = 0$. Pour les variétés V_n de dimension $n > 3$ nous allous demontrer le

Théorème [2]. *Sur une variété riemannienne V_n de dimension $n \geq 4$, il* *existe une métrique pour laquelle le carré du tenseur de courbure conforme est constant non nul.*

Soit φ une fonction C^∞ sur V. Faisons le changement de métrique $g'_{ij} = g_{ij} + \partial_i\phi\partial_j\varphi$. Les quantités (′) sont relatives à la métrique g'_{ij}.

Dans l'expression de $(S')^2$ intervient la fonction φ par ses dérivées premières et secondes. On peut choisir la fonction ϕ de telle sorte que $(S')^2$ soit nul sur aucun ouvert. Nous allons montrer qu'à la suite d'un nombre fini de changements de métrique, le carré du tenseur de courbure conforme (relativement à la dernière métrique) est partout positif.

Demonstration. Soit M un point de V où $(S)^2 = 0$; U un voisinage de M muni de coordonnées normales $(x_1, \cdots, x_n)$. Prenons une fonction $\varphi \in C^\infty$, nulle à l'extérieur de U, dont les dérivées premières sont petites de l'ordre du diamètre d de U, qui est choisi suffisamment petit. Le tenseur de courbure conforme de la métrique $g'_{ij} = g_{ij} + \partial_i\varphi\partial_j\varphi$ a d'après le paragraphe 2 pour développement en fonction de d^2 l'espression:

$$\begin{aligned} S'_{ijkl} = S_{ijkl} &+ \nabla_{ik}\varphi\nabla_{jl}\varphi - \nabla_{il}\varphi\nabla_{kj}\varphi \\ &- \frac{1}{n-2}\nabla^\mu_\mu\varphi(\nabla_{ik}\varphi g_{jl} - \nabla_{il}\varphi g_{jk} + \nabla_{jl}\varphi g_{ik} - \nabla_{jk}\varphi g_{il}) \\ &+ \frac{(\nabla^\nu_\nu\varphi)^2 - \nabla_{\nu\mu}\varphi^{\nu\mu}\varphi}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{jk}g_{il}) + \frac{1}{n-2}(\nabla^\mu_i\varphi\nabla_{\mu k}\varphi g_{jl} \\ &- \nabla^\mu_i\varphi\nabla_{\mu l}\varphi g_{jk} + \nabla^\mu_j\varphi\nabla_{\mu l}\varphi g_{ik} - \nabla^\mu_j\varphi\nabla_{\mu k}\varphi g_{il}) + d^2\theta_{ijkl}\,, \end{aligned}$$

θ_{ijkl} étant des fonctions de φ dont les valeurs sont de l'ordre de $f'^2f''^2$, φ étant lié à f comme suit:

Soit $f(\xi)$ une fonction C^∞ sur l'intervelle $[0, +\infty[$; $f(\xi) = 0$ pour $\xi \geq 1$; $f'(\xi) > 0$ pour $0 \leq \xi < 1$; $f''(\xi) < 0$ pour $0 \leq \xi < 1$. Soit $\lambda, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, n+1$ constantes dont les valeurs sont comprises entre 1 et 2. Prenons

$$\varphi = \frac{\lambda r^2}{2} f\left(\frac{\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2}{r^2}\right).$$

La constante r est choisie suffisamment petite pour que dans la suite apparaissent nettement des parties principales.

$$\nabla_{ii}\varphi = \lambda\left(\alpha_i f' + \frac{2\alpha_i^2 x_i^2}{r^2} f''\right) + d^2\rho_{ii}\;; \quad \nabla_{ij}\varphi = \lambda\frac{2\alpha_i\alpha_j}{r^2}x_i x_j f'' + d^2\rho_{ij}\,,$$

ρ_{ii} et ρ_{ij} étant des fonctions de φ dont les valeurs sont de l'ordre de f'.

Nous noterous $\sum_l^{ijk}$ la somme pour toutes les valeurs de l sauf pour les valeurs i, j et k. En écrivant seulement les parties principales, pour $i \neq j \neq k$:

$$R'_{ijij} = R_{ijij} + \lambda^2\left(\alpha_i f' + \frac{2\alpha_i^2 x_i^2}{r^2} f''\right)\left(\alpha_j f' + \frac{2\alpha_j^2 x_j^2}{r^2} f''\right) - \lambda^2\left(\frac{2\alpha_i\alpha_j}{r^2} x_i x_j f''\right)^2 .$$

$$R'_{ijij} = R_{ijij} + \lambda^2\alpha_i\alpha_j f'\left[f' + \frac{2(\alpha_j x_j^2 + \alpha_i x_i^2)}{r^2} f''\right] .$$

$$R'_{ijik} = R_{ijik} + \lambda^2\frac{2\alpha_j\alpha_k}{r^2} x_j x_k\left(\alpha_i f' + \frac{2\alpha_i^2 x_i^2}{r^2} f''\right) f'' - \lambda^2\frac{4\alpha_i^2 x_i^2}{r^4}\alpha_j x_j \alpha_k x_k f''^2 .$$

$$R'_{ijik} = R_{ijik} + 2\lambda^2\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{r^2} x_j x_k f' f'' .$$

$$R'_{ijkl} = R_{ijkl} .$$

$$R'_{ii} = \sum_k^i R'_{ikik} = R_{ii} + \lambda^2\alpha_i f'\left[f'\sum_k^i \alpha_k + \frac{2}{r^2}\left(\sum_k^i \alpha_k^2 x_k^2 + \alpha_i x_i^2 \sum_k^i \alpha_k\right) f''\right] .$$

$$R'_{ij} = \sum_k^{ij} R'_{ikjk} = R_{ij} + 2\lambda^2 \sum_k^{ij} \alpha_k\alpha_i\alpha_j \frac{x_i x_j}{r^2} f' f'' .$$

$$R' = \sum_i R'_{ii} = R + \lambda^2 f'\left\{f'\sum_i\left(\alpha_i \sum_k^i \alpha_k\right)\right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2} f''\left[\sum_i\left(\alpha_i \sum_k^i \alpha_k^2 x_k^2\right) + \sum_i\left(\alpha_i^2 x_i^2 \sum_k^i \alpha_k\right)\right]\right\} .$$

$$S'_{ijij} = R'_{ijij} - \frac{1}{n-2}(R'_{ii} + R'_{jj} - 2R'_{ij}) + \frac{R'}{(n-1)(n-2)} .$$

$$S'_{ijij} = S_{ijij} + \lambda^2(a_{ij} f'^2 + b_{ij} f' f'') + r^2\theta_{ij} ,$$

où a_{ij} est un scalaire:

$$a_{ij} = \alpha_i\alpha_j - \frac{1}{n-2}\left(\alpha_i \sum_k^i \alpha_k + \alpha_j \sum_k^j \alpha_k\right) + \frac{\sum_i\left(\alpha_i \sum_k^i \alpha_k\right)}{(n-1)(n-2)} .$$

$$a_{ij} = \frac{1}{n-2}\left[(n-4)\alpha_i\alpha_j - (\alpha_i + \alpha_j)\sum_k^{ij} \alpha_k + \frac{2}{n-1}\sum_{k<l} \alpha_k\alpha_l\right] .$$

et où b_{ij} est une forme quadratique:

$$b_{ij} = \frac{1}{(n-2)r^2}\left[(n-4)(\alpha_i x_i^2 + \alpha_j x_j^2)\alpha_i\alpha_j - (\alpha_i^2 x_i^2 + \alpha_j^2 x_j^2)\sum_k^{ij} \alpha_k\right.$$

$$\left. - (\alpha_i + \alpha_j)\sum_k^{ij} \alpha_k^2 x_k^2 + \frac{2}{n-1}\sum_k\left(\alpha_k \sum_l^k \alpha_l^2 x_l^2\right) + \frac{2}{n-1}\sum_k\left(\alpha_k^2 x_k^2 \sum_l^k a_l\right)\right] .$$

$$S'_{ijik} = R'_{ijik} - \frac{1}{n-2} R'_{jk} .$$

$$S'_{ijik} = S_{ijik} + \frac{2\lambda^2}{r^2}\alpha_j\alpha_k x_j x_k f' f''\left(\alpha_i - \frac{1}{n-2}\sum_l^{kj} \alpha_l\right).$$

$$S'_{ijik} = S_{ijik} + \lambda^2 a_{ijk} x_j x_k f' f'' + r^2 \theta_{ijk} ,$$

avec a_{ijk} un scalaire,

$$a_{ijk} = \frac{2\alpha_j \alpha_k}{(n-2)r^2} \left[(n-3)\alpha_i - \sum_l^{ijk} \alpha_l \right] ,$$

$$S'_{ijkl} = S_{ijkl} + r^2 \theta_{ijkl} .$$

$\theta_{ij}, \theta_{ijk}$ et θ_{ijkl} sont des fonctions de φ dont les valeurs sont de l'ordre de celle de $f''^2 f'^2$.

On vérifie que pour n $= 3$, $a_{ij} = b_{ij} = a_{ijk} = 0$. Pour $n > 3$ nous pouvons choisir les α_i de manière que les a_{ij} et les a_{ijk} ne soient pas nuls.

Il y a $n(n-1)/2$ formes du type $a_{ij} f'^2 + b_{ij} f' f''$ et n relations entre elles: $\sum_j^i a_{ij} = 0$, $\sum_j^i b_{ij} = 0$; ce qui fait qu'il y a $\inf \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ n(n-3)/2 \end{matrix} \right\}$ formes indépendantes plus les $n(n-1)/2$ formes du type $a_{ijk} x_j x_k f' f''$ qui sont indépendantes. Ce qui fait en tout $\inf \left\{ \begin{matrix} n(n-2) \\ (n^2+n+2)/2 \end{matrix} \right\}$ formes indépendantes.

Montrous qu'en aucun point intérieur au domaine où l'on opère, les parties principales des S'_{ijij} et des S'_{ijik} peuvent être nulles simultanément.

Lorsque $\sum_i \alpha_i x_i^2$ n'est pas voisin de r^2, S_{ijij} et S_{ijik} qui sont de l'ordre de r ou d'un ordre plus élevé, sont petits par rapport aux $\lambda^2 a_{ij} f'^2$. Comme les a_{ij} ne sout pas nuls, les parties principales des S'_{ijij} ne sont pas nulles, et $(S')^2$ ne s'annule pas. Il en est de même dans tout le domaine où l'on opère, si une composante S_{ijij} est identiquement nulle.

Au point $M(x_i = 0)$,

$$(S')^2 = 4\lambda^4 f'^4 \sum_{i<j} (a_{ij})^2 .$$

Lorsque $\sum \alpha_i x_i^2$ est voisin de r^2, si S_{ijij} n'est pas identiquement nul, la partie principale de S'_{ijij} avant de devenir S_{ijij} est $S_{ijij} + \lambda^2(a_{ij} f'^2 + b_{ij} f' f'')$. De même pour les S_{ijik}.

Des équations telles que $S'_{ijij} = 0$ ou $S'_{ijik} = 0$ permettent de calculer les n coordonnées de points P et les valeurs possibles de λ. Dans le cas général, il y a suffisammant d'équations indépendantes pour qu'elles ne soient pas toutes vérifiées simultanément. Si elles l'étaient il suffirait de choisir λ en dehors des valeurs qui rendraient possible la nullité simultanée des équations. Mais

$$(S')^2 = 2 \sum_{ij} (S'_{ijij})^2 + 4 \sum_{ijk}^{j \neq k} (S'_{ijik})^2 + \sum_{ijkl}^{i \neq j \neq k \neq l} (S_{ijkl})^2 + r^2 \phi ,$$

ϕ prenant des valeurs de l'ordre des carrés qui rentrent dans l'expression de $(S')^2$.

Nous venons de montrer que l'on peut choisir λ et les α_i de manière que les S'_{ijij} et les S'_{ijik} ne s'annulent pas simultanément. Dans le domaine où l'on opère $(S')^2$ ne s'annule pas, alors qu'on a rien changé à l'extérieur. Au bout d'un nombre fini d'opérations, le carré du tenseur de courbure conforme $(\Sigma)^2$, relativement à la métrique G_{ij}, est nul en aucun point de la variété. Faisons le changement de métrique $G'_{ij} = (\Sigma)G_{ij}$. $(\Sigma')^2 = 1$ sur toute la variété.

Toutes les transformations conformes de la variété munie de cette dernière métrique sont des isométries.

5. Changement local de métrique dans le cas général

Nous allons étudier un changement local de métrique dans une boule $B_{M(r)}$ centrée en M, de rayon r très petit: $g'_{ij} = g_{ij} + h_{ij}$ avec h_{ij} de l'ordre de r, petit à coté de g_{ii}. h_{ij} est identiquement nul à l'extérieur de $B_{M(r)}$.

Nous munissons la boule de coordonnées normales en M.

$$\Gamma'^j_{ik} - \Gamma^j_{ik} = C_i{}^j{}_k = \tfrac{1}{2} g'^{j\lambda}(\nabla_i g'_{k\lambda} + \nabla_k g'_{i\lambda} - \nabla_\lambda g'_{ik}) .$$

Les quantités $(')$ sont relatives à la métrique g'_{ij}:

$$R'_i{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl} + \nabla_l C_i{}^j{}_k - \nabla_k C_i{}^j{}_l + C_l{}^j{}_\lambda C_i{}^\lambda{}_k - C_k{}^j{}_\lambda C_i{}^\lambda{}_l .$$

Il s'agit de voir si on peut trouver une métrique telle qu'une composante du tenseur de courbure relatif à $g'_{ij}(R'_i{}^j{}_{ij})$, soit partout dans la boule plus grande ou partout plus petite que celle de la courbure initiale $R_i{}^j{}_{ij}$.

Comme la partie principale de $R'_i{}^j{}_{kl}, \mathscr{P}_p(R'_i{}^j{}_{kl})$ est à intégrale nulle, nous sommes obligés de la prendre identiquement nulle.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_p(R'_i{}^j{}_{kl}) &\equiv \mathscr{P}_p(\nabla_l C_i{}^j{}_k - \nabla_k C_i{}^j{}_l) \\ &\equiv \tfrac{1}{2}\mathscr{P}_p(\nabla_{li} g'_{jk} + \nabla_{kj} g'_{il} - \nabla_{lj} g'_{ik} - \nabla_{ik} g'_{ji}) \equiv 0 .\end{aligned}$$

La nouvelle partie principale a pour intégrale:

$$\begin{aligned}\int_{B_{M(r)}} R'_i{}^j{}_{ij} dV &\sim \int_B R_i{}^j{}_{ij} dV + \sum_\lambda \int_B (C_j{}^j{}_\lambda C_i{}^\lambda{}_i - C_i{}^j{}_\lambda C_i{}^\lambda{}_j) dV \\ &\sim \int_B R_i{}^j{}_{ij} dV + \frac{1}{4}\sum_\lambda \int_B \Big[\nabla_\lambda g'_{jj}(2\nabla_i g'_{i\lambda} - \nabla_\lambda g'_{ii}) - (\nabla_i g'_{j\lambda})^2 \\ &\qquad + (\nabla_\lambda g'_{ij} - \nabla_j g'_{\lambda i})^2\Big] dV ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_B R'_i{}^j{}_{ij} dV \sim \int_B R_i{}^j{}_{ij} dV - \frac{1}{4}\sum_\lambda \int_B \Big[& h_{jj}\Big(\nabla_{\lambda i} g'_{i\lambda} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda\lambda} g'_{ii}\Big) - \frac{1}{2} h_{ii} \nabla_{\lambda\lambda} g'_{jj} \\ & - h_{j\lambda}\nabla_{ii} g'_{j\lambda} + h_{ij}(\nabla_{\lambda\lambda} g'_{ij} - \nabla_{\lambda j} g'_{\lambda i}) + h_{i\lambda}(\nabla_{i\lambda} g'_{jj} - \nabla_{j\lambda} g'_{ij} + \nabla_{jj} g'_{\lambda i})\Big] dV .\end{aligned}$$

D'après $\mathscr{P}_p(R_i'^j{}_{kl}) \equiv 0$,

$$\int_B R_i'^j{}_{ij} dV \sim \int_B R_i{}^j{}_{ij} dV - \frac{1}{4}\sum_\lambda \int_B \Big[\frac{1}{2} h_{\lambda\lambda} \nabla_{ii} h_{jj} - h_{ii}\Big(\nabla_{\lambda j} h_{\lambda j} - \frac{1}{2}\nabla_{jj} h_{\lambda\lambda}\Big)$$
$$+ h_{ij}(\nabla_{i\lambda} h_{\lambda j} - \nabla_{ij} h_{\lambda\lambda}) + h_{\lambda j}(\nabla_{ij} h_{i\lambda} - \nabla_{ii} h_{\lambda j})\Big] dV ,$$

$$\int_B R_i'^j{}_{ij} dV \sim \int_B R_i{}^j{}_{ij} dV - \frac{1}{4}\sum_\lambda \int_B \Big[h_{\lambda\lambda}\Big(\frac{1}{2}\nabla_{ii} h_{jj} + \frac{1}{2}\nabla_{jj} h_{ii} - \nabla_{ij} h_{ij}\Big)$$
$$+ h_{\lambda j}(\nabla_{ij} h_{i\lambda} - \nabla_{ii} h_{j\lambda} + \nabla_{i\lambda} h_{ij} - \nabla_{\lambda j} h_{ii})\Big] dV .$$

D'où

$$\int_B R_i'^j{}_{ij} dV \sim \int_B R_i{}^j{}_{ij} dV .$$

Par ce procédé il est impossible de modifier le tenseur de courbure d'une manière satisfaisante.

6. Changement local de métriques (étude de la courbure de Ricci)

$$R'_{ij} = R_{ij} + \nabla_\alpha C_i{}^\alpha{}_j - \nabla_i C_\alpha{}^\alpha{}_j + C_\alpha{}^\alpha{}_\beta C_i{}^\beta{}_j - C_\alpha{}^\beta{}_i C_\beta{}^\alpha{}_j .$$

Comme sont intégrale est nulle, nous prenons la partie principale de R'_{ij} identiquement nulle.

$$\mathscr{P}_p(R'_{ij}) \equiv \mathscr{P}_p(\nabla_\alpha C_i{}^\alpha{}_j - \nabla_i C_\alpha{}^\alpha{}_j)$$
$$\equiv \frac{1}{2}\mathscr{P}_p(\nabla_i^\alpha g'_{\alpha j} + \nabla_j^\alpha g'_{\alpha i} - \nabla_\alpha^\alpha g'_{ij} - g^{\alpha\beta}\nabla_{ij} g'_{\alpha\beta}) \equiv 0 .$$

L'intégrale de la nouvelle partie principale est:

$$\int_B R'_{ii} dV \sim \int_B R_{ii} dV + \int_B [C_\alpha{}^\alpha{}_\beta C_i{}^\beta{}_j - C_\alpha{}^\beta{}_i C_\beta{}^\alpha{}_j] dV ,$$

$$\int_B R'_{ii} dV \sim \int_B R_{ii} dV + \frac{1}{4}\sum_\lambda\sum_\mu \int_B [\nabla_\lambda g'_{\mu\mu}(2\nabla_i g'_{i\lambda} - \nabla_\lambda g'_{ii})$$
$$- (\nabla_i g'_{\lambda\mu})^2 + (\nabla_\lambda g'_{i\mu} - \nabla_\mu g'_{i\lambda})^2] dV ,$$

$$\int_B R'_{ii} dV \sim \int_B R_{ii} dV - \frac{1}{4}\sum_\lambda\sum_\mu \int_B [2h_{i\lambda}(\nabla_{i\lambda} g'_{\mu\mu} + \nabla_{\mu\mu} g'_{i\lambda} - \nabla_{\lambda\mu} g'_{i\mu})$$
$$- h_{\lambda\mu}\nabla_{ii} g'_{\lambda\mu} - h_{ii}\nabla_{\lambda\lambda} g'_{\mu\mu}] dV .$$

Moyennant $\mathscr{P}_p(R'_{ij}) \equiv 0$,

$$\int_B R'_{ii}dV \sim \int_B R_{ii}dV - \frac{1}{4}\sum_\lambda \sum_\mu \int_B h_{\lambda\mu}(2\nabla_{i\mu}h_{i\lambda} - \nabla_{ii}h_{\lambda\mu} - \nabla_{\lambda\mu}h_{ii})dV .$$

Evidemment $\mathscr{P}_p(R'^{\,j}_{i\;kl}) \equiv 0$ entraîne $\int_B R'_{ii}dV \sim \int_B R_{ii}dV$. Mais il n'est pas possible de montrer directement que $\mathscr{P}_p(R'_{ij}) \equiv 0$ entraîne l'équivalence de $\int_B R'_{ii}dV$ et de $\int_B R_{ii}dV$. En effet au moyen de $\mathscr{P}_p(R'_{ij}) \equiv 0$ il est impossible de modifier $\sum_\lambda \sum_\mu \int_B h_{\lambda\mu}\nabla_{ii}h_{\lambda\mu}dV$ et de l'exprimer en fonction des autres intégrales.

Comme nous le démontrerons dans le prochain paragraphe $\mathscr{P}_p(R'_{ij}) \equiv 0$ entraîne $\int_B R'dV \sim \int_B RdV$. Donc si $\int_B (R'_{ii} - R_{ii})dV$ n'était pas équivalent à zero, on pourrait, sans modifier la courbure scalaire, rapprocher les composantes du tenseur de Ricci de leur valeur mogenne R/n. Or le variété produit du cercle C_1 par la sphére S_2 munie de la métrique produit constitue un contre-exemple. $C_1 \times S_2$ a sa courbure scalaire constante et sa courbure de Ricci positive ou nulle. Si $\int_B (R'_{ii} - R_{ii})dV$ n'était pas équivalent à zéro, on pourrait sur $C_1 \times S_2$ construire une métrique dont la courbure de Ricci serait strictement positive. Une telle métrique n'existe pas car le ler nombre de Betti de $C_1 \times S_2$ est égal à 1, donc:

Théorème. $\mathscr{P}_p(R'_{ij}) \equiv 0$ *entraîne* $\int_B R'_{ii}dV \sim \int_B R_{ii}dV$.

Soit $\phi(M)$ et $\varphi(M)$ le maximum et le minimum de la courbure de Ricci au point $M \in V$. Pour toute direction i:

$$\phi(M)g_{ii}(M) \leq R_{ii}(M) \leq \phi(M)g_{ii}(M) .$$

Si $\varphi(M)$ est constant nous avons vu que par un changement local de métrique, il n'est sûrement pas possible de rendre $\varphi(M)$ plus grand ou plus petit. Par contre si $\varphi(M)$ n'est pas constant rien empêche de penser qu'on puisse mettre en évidence une métrique g'_{ij} pour laquelle $\varphi'(M)$ serait égal à une constante avec $\inf_V \varphi < \varphi'(M) < \sup_V \varphi$. On peut établir le théorème suivant:

Théorème. *Si $\varphi(M)$ n'est pas constant, il existe sur V une métrique g'_{ij} pour laquelle $\inf_V \varphi < \varphi'(M) < \sup_V \varphi$ pour $\forall M \in V$. Si $\phi(M)$ n'est pas constant, il existe sur V une métrique g''_{ij} pour laquelle $\inf_V \phi < \phi''(M) < \sup_V \phi$. En particulier: Une variété riemannienne à courbure de Ricci positive ou nulle et positive en un point, possède une métrique pour laquelle la courbure de Ricci est partout positive. Des théorèmes analogues peuvent être montrés pour différents tenseurs, en particulier le même théorème s'applique aux tenseurs*

$R_{ij} - kRg_{ij}$ (*k une constante*), *pour* $k > 1/2$ *et pour* $k < 1/[2(n-1)]$.

Démonstration. Supposons qu'en un point $Q \in V$, $\varphi(Q) = m = \inf_V \varphi$. Par hypothèse en un point $P \in V$, $\varphi(P) = a > m$. Nous allons montrer qu'il existe une métrique g'_{ij} sur V pour laquelle $\varphi'(M) > m$ pour $M = Q$ et en tout point M où $\varphi(M) > m$.

Soit C un chemin de longueur fini, d'extrémités P et Q. En $M \in C$ considéron sune boule $B_M(r)$ de centre M et de rayon $r(M)$ [$r(M)$ suffisamment petit pour que $B_M(r)$ existe de munie de coordonnées géodésiques polaires $(\rho, \varphi_{\alpha_1}, \cdots, \varphi_{\alpha_{n-1}})$]. Il existe $k(M)$, tel qu'a l'intérieur de $B_M(r)$ la courbure sectionnelle K vérifie $|K| < k(M)$. Soit $r = \inf_{M \in C} r(M)$ et $k = \sup_{M \in C} k(M)$, r est pris suffisamment petit pour que $\varphi(M) \geq b > m$ pour $M \in B_p(r)$.

Soit $R \in C$ avec distance de P à R égale à $r - \delta$. A l'intérieur de $B_R(r)$, faisons le changement de métrique conforme $g'_{ij} = e^{\varphi} g_{ij}$ avec $\varphi \in C^\infty$, qu'on pourra prendre aussi voisin qu'on veut de la fonction $f = -\frac{1}{4}\lambda d^2(1-x)^2$ pour $0 \leq x = \rho^2/d^2 \leq 1$, avec $d \leq r$ et $\lambda > 0$, et $f \equiv 0$ pour $x \geq 1$. L'expression des composantes du tenseur de Ricci pour la nouvelle métrique est:

$$\begin{aligned} R'_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} &- \frac{1}{2}(n-2)\nabla_\alpha \nabla_\beta f + \frac{1}{4}(n-2)\nabla_\alpha f \nabla_\beta f \\ &- \frac{1}{2}\left(\nabla^\nu \nabla_\nu f + \frac{1}{2}(n-2)\nabla^\nu f \nabla_\nu f\right) g_{\alpha\beta} . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} R'_{\rho\rho} &= R_{\rho\rho} - (n-1)\lambda + 2(n-1)\lambda x - (\lambda/2)(1-x)\rho\partial_\rho \mathrm{Log}\sqrt{|g|} , \\ R'_{ij} &= R_{ij} - (1/2)(n-2)[(1-x)\lambda g_{ij} + (1/2)\partial_\rho g_{ij}(1-x)\lambda\rho] \\ &\quad - (1/2)[\lambda(1-3x) + (n-1)\lambda(1-x) + (1-x)\lambda\rho\partial_\rho \mathrm{Log}\sqrt{|g|} \\ &\quad + (1/2)(n-2)(1-x)^2\lambda^2\rho^2] g_{ij} . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi'(M) > \varphi(M) + n\lambda\rho^2/d^2 - (n-1)\lambda - Ck_0\lambda d^2$$

avec $|K| < k_0$ à l'intérieur de la boule de rayon d, tel que $k_0 d^2 \leq 2/(3n)$, et C étant une constante ($C < (5n-7)/16$ dans le cas où $\varphi(M) \geq 0$), $C < (5n-7)/16 + |m|/(4k)$ dans le cas général. On prendra $\lambda < k$.

Prenons d de telle sorte que $2kd^2C < 1/2$, $\delta = (1 - 1/(4n))d$ et $\lambda < (b-m)/(2n-1)$. Si $k_0 < 2k$:

$$\begin{aligned} &\text{à l'intérieur de } B_p(r)\colon \varphi'(M) > b - (n-1/2)\lambda > (b+m)/2 , \\ &\text{à l'extérieur de } B_p(r)\colon \varphi'(M) > m - (n-1/2)\lambda + n\lambda(1-1/(4n))^2 \\ &\qquad\qquad = m + \lambda/(16n) . \end{aligned}$$

Or, il existe une constante $H (H < 4)$ telle que la courbure sectionnelle k_0 au bout de m changements de métriques analogues à celui qu'on vient de décrire vérifie: $k_0 < k + mH\lambda$. Donc il suffit de prendre $\lambda < k/(8nH)$ pour que $k_0 < 2k$ même au bout de $8n$ changements de métriques. Après le changement de métrique à l'intérieur de $B_R(d)$, nous faisons un nouveau changement de métrique à l'intérieur d'une boule $B_S(d)$ centrée en $S \in C$, S étant à une distance de R égale à $\{1 - 1/(4n)\}d$. Puis nous recommençons. A chaque opération on progresse de $d/(4n)$ le long de C, les boules restent de diamétre d constant car en chaque point nous faisons au plus $8n$ changements de mètriques et ainsi $k_0 < 2k$ et d vérifie toute les inégalités. Le point Q est atteint au bout de ($4n/d \times$ longueur de C) changements de métriques au maximum.

On peut rendre $\varphi'(M) > m$ sur tout compact au bout d'un nombre fini de changements locaux de métriques conforms. On peut démontrer d'une manière analogue le

Théorème. *Une variété kählerienne, à courbure scalaire positive ou nulle et positive en un point, possède une métrique kählerienne à courbure scalaire partout positive.*

7. Changement local de métrique (étude de la courbure scalaire)

$$R' = g'^{ij}(R_{ij} + \nabla_\alpha C_i{}^\alpha{}_j - \nabla_i C_\alpha{}^\alpha{}_j + C_\alpha{}^\alpha{}_\beta C_i{}^\beta{}_j - C_\alpha{}^\beta{}_i C_\beta{}^\alpha{}_j) ,$$

$$\int_B R' dV = \int_B R_{\lambda\mu} g'^{\lambda\mu} dV + \int_B g'^{\beta\nu} g'^{\mu\rho} (\nabla_\alpha g'_{\nu\rho} C_\beta{}^\alpha{}_\mu - \nabla_\mu g'_{\nu\mu} C_\alpha{}^\alpha{}_\rho) dV$$
$$+ \int_B g'^{\lambda\mu} (C_\alpha{}^\alpha{}_\beta C_\lambda{}^\beta{}_\mu - C_\beta{}^\alpha{}_\lambda C_\alpha{}^\beta{}_\mu) dV ,$$

$$\int_B R' dV = \int_B R_{\lambda\mu} g'^{\lambda\mu} dV + \frac{1}{4} \int_B g'^{\beta\nu} g'^{\mu\rho} g'^{\alpha\lambda} [(2\nabla_\beta g'_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda g'_{\beta\mu}) \nabla_\alpha g'_{\nu\rho}$$
$$- \nabla_\rho g'_{\alpha\lambda} \nabla_\mu g'_{\beta\nu}] dV .$$

L'intégrale de la partie principale de R' est nulle, nous devous donc prendre, pour des raisons analogues à celles précédemment exprimées pour le tenseur de courbure:

$$\mathscr{P}_p(R') \equiv \mathscr{P}_p(\nabla^{\nu\mu} g'_{\nu\mu} - g^{\nu\mu} \nabla^\lambda_\lambda g'_{\nu\mu}) \equiv 0 .$$

L'intégrale de la nouvelle partie principale est:

$$\int_B R' dV \sim \int_B R dV + \frac{1}{4} \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \int_B [\nabla_\lambda g'_{\nu\mu} (2\nabla_\mu g'_{\lambda\nu} - \nabla_\lambda g'_{\nu\mu}) - \nabla_\lambda g'_{\nu\nu} \nabla_\lambda g'_{\mu\mu}] dV .$$

Moyennant $\mathscr{P}_p(R') \equiv 0$,

$$\int_B R'dV \sim \int_B RdV - \frac{1}{4}\sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \int_B h_{\nu\mu}[2\nabla_{\lambda\mu}g'_{\lambda\nu} - \nabla_{\lambda\lambda}g'_{\nu\mu} - \nabla_{\nu\mu}g'_{\lambda\lambda}]dV .$$

On constate que $\mathscr{P}_p(R'_{ij}) = 0$ entraîne $\int_B R'dV \sim \int_B RdV$, nous avoins admis ce résultat dans le paragraphe précédent. Mais pour étudier la courbure scalaire il suffit de prendre $\mathscr{P}_p(R') \equiv 0$ et on peut écrire:

$$\int_B R'dV \sim \int_B RdV - \frac{1}{4}\sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \int_B \Big[\frac{1}{2}(\nabla_\lambda g'_{\nu\mu} - \nabla_\nu g'_{\lambda\mu})^2$$
$$- (\nabla_\mu g'_{\nu\nu} - \nabla_\nu g'_{\mu\nu})(\nabla_\mu g'_{\lambda\lambda} - \nabla_\lambda g'_{\mu\lambda})\Big]dV .$$

Si $n = 2$ on vérifie que $\int_B R'dV \sim \int_B RdV$ et on ne peut pas modifier la courbure scalaire.

Pour une variété V_n de dimension $n > 2$, soit $h_{\nu\mu}$ un tenseur qui vérifie $\nabla^\nu h_{\nu\mu} \equiv \nabla_\mu h^\nu_\nu$ et qui ne vérifie pas toutes les identités $\nabla_\lambda h_{\nu\mu} \equiv \nabla_\nu h_{\lambda\mu}$. Si $n = 2$, un tel tenseur n'existe pas.

Le tenseur $h_{\nu\mu}$ vérifie $\mathscr{P}_p(R') = 0$ et nous avons $\mathscr{P}_p\Big[\int_B (R' - R)dV\Big] < 0$. On peut faire en sorte qu'a l'intérieur de la boule $B_M(r)$, $R' < R$. Sur toute la variété, on opère simultanément par de tel changement de métrique à l'intérieur de boules disjointes. Et en répétant l'opération un nombre fini de fois, on peut rendre R' négatif sur toute la variété.

Théorème. *Sur toute variété riemannienne V_n de dimension $n>2$, il existe une métrique pour laquelle la courbure scalaire est négative.*

Soit $t_{\nu\mu}$ un tenseur identiquement nul à l'extérieur de la boule $B_M(r)$ et dont les composantes sont de l'ordre de r à l'intérieur.

Considérous le changement de métrique $g'_{ij} = g_{ij} + fg_{ij} + t_{ij}$ et écrivous que

$$\mathscr{P}_p(R') \equiv \mathscr{P}_p[\nabla^\alpha_\alpha f + \nabla^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} - n\nabla^\alpha_\alpha f - \nabla^\alpha_\alpha t^\nu_\nu] \equiv 0.$$

A tout tenseur $t_{\nu\mu}$, on peut faire correspondre un changement de métrique $g'_{ij} = g_{ij} + fg_{ij} + t_{ij}$ qui vérifie $\mathscr{P}_p(R') = 0$, il suffit de prendre la fonction f telle que

$$(n-1)\mathscr{P}_p(\nabla^\alpha_\alpha f) \equiv \mathscr{P}_p(\nabla^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} - \nabla^\alpha_\alpha t^\beta_\beta) .$$

Un calcul donne alors:

$$\int_B R'dV \sim \int_B RdV - \frac{1}{4}\Big[(n-1)(n-2)\int_B \nabla^\nu f \nabla_\nu f dV$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\mu\sum_\nu \int_B (\nabla_\lambda t_{\nu\mu} - \nabla_\nu t_{\lambda\mu})^2 dV - \sum_\mu \int_B (\nabla^\nu t_{\nu\mu} - \nabla_\mu t^\nu_\nu)^2 dV\Big].$$

Etudions pour tous les tenseurs $t_{\nu\mu}$ l'expression de $\int_B R'dV$ et cherchons s'il est possible de mettre en évidence un tenseur $t_{\nu\mu}$ pour lequel $\int_B (R'-R)dV$ serait positif. Tout d'abord, il fant supposer $\nabla^\nu t_{\nu\mu} \not\equiv \nabla_\mu t^\nu_\nu$ et considérons le rapport:

$$I = \frac{(n-1)(n-2)\int_B \nabla_\lambda f \nabla^\lambda f dV + \frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\mu\sum_\nu \int_B (\nabla_\lambda t_{\nu\mu} - \nabla_\nu t_{\lambda\mu})^2 dV}{\sum_\mu \int_B (\nabla^\nu t_{\nu\mu} - \nabla_\mu t^\nu_\nu)^2 dV}.$$

C'est une expression homogène, on peut prendre

$$\sum_\mu \int_B (\nabla^\nu t_{\nu\mu} - \nabla_\mu t^\nu_\nu)^2 dV = 1.$$

Le développement de

$$\sum_\lambda\sum_\mu\sum_\nu \Big[\nabla_\mu t_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda t_{\nu\mu} - \frac{1}{n}(\nabla^\alpha t_{\alpha\lambda} - \nabla_\lambda t^\alpha_\alpha) g_{\nu\mu}\Big]^2 \geq 0$$

montreque $I \geq 1/(2n)$, il existe une borne inférieure a. Si a est atteint par un tenseur $t_{\lambda\mu}$, $t_{\lambda\mu}$ vérifie:

$$\nabla^\lambda_\lambda t_{\nu\mu} - \nabla^\lambda_\nu t_{\lambda\mu} + (n-2)(\nabla_{\nu\mu} f - \nabla^\lambda_\lambda f g_{\nu\mu})$$
$$- a(\nabla_{\alpha\nu} t^\alpha_\mu - \nabla_{\nu\mu} t^\alpha_\alpha) + a(\nabla^{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} - \nabla^\alpha_\alpha t^\beta_\beta) g_{\nu\mu} \equiv 0$$

en saturant par $g^{\nu\mu}$ on trouve que $(n-1)^2(a-1)\nabla^\alpha_\alpha f \equiv 0$. Comme on peut toujours faire en sorte que $\nabla^\alpha_\alpha f \not\equiv 0$, le minimum a est égal a 1. D'où $\int_B R'dV \leq \int_B RdV$, quelque soit le changement local de métrique, la partie principale de R' étant prise identiquement nulle. D'après un théorème de Lichnerowicz [13] toute variété compacte spinorielle, telle que sa courbure riemannienne scalaire soit positive ou nulle, sans être identiquement nulle, admet un $\hat{A}$-genre de Hirzebruch égal à zéro.

Ce théorème rend très probable l'hypothèse, selon laquelle, la possession par une variété riemannienne compacte d'une métrique à courbure scalaire constante et positive, entraîne des implications topologiques pour le variété.

Pour démontrer ce résultat, il suffit de mettre en évidence une variété compacte spinorielle dont le $\hat{A}$-genre de Hirzebruch ne soit pas nul. Un tel contre-exemple montrerait aussi que $I \geq 1$ et que $\int_B (R' - R)dV \leq 0$.

En résumé. La courbure scalaire R d'une variété riemannienne compacte V_n de dimension $n = 2$, a une signification topologique. La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = \frac{1}{4\pi} \int_V RdV$. Pour les variétés compacte V_n de dimension $n \geq 3$, le signe de la courbure scalaire a-t-il une implication topologique? Nous avons montré que le signe négatif n'a pas d'implication topologique, tandis qu'il est probable que le signe positif a une signification topologique.

SECOND PARTIE

8. Changement de métrique kählerienne sur une variété kählerienne

Une variété kählerienne est une variété à structure complexe, qui possède une métrique kählerienne $g_{\lambda\bar{\mu}}$, c'est-à-dire une métrique telle que $\partial_\nu g_{\lambda\bar{\mu}} = \partial_\lambda g_{\nu\bar{\mu}}$.

Soit une fonction $\varphi \in C^\infty$, telle que

$$\inf_{V \atop \text{et pour } \forall \xi} \left(\frac{\partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi \xi^\lambda \xi^{\bar{\mu}}}{\xi^\nu \xi_\nu} \right) > -1 \ ,$$

φ sera dit alors fonction C^∞ admissible.

Considérons le changement de métrique kählerienne:

$$g'_{\lambda\bar{\mu}} = g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi \ .$$

Les composantes du tenseur de Ricci sont $R_{\lambda\bar{\mu}} = -\partial_{\lambda\bar{\mu}} \operatorname{Log}|g|, |g|$ étant le module du déterminant de la matrice $\{g_{\lambda\bar{\mu}}\}$. Les quantités (') sont relatives à la métrique $g'_{\lambda\bar{\mu}}$.

$$R'_{\lambda\bar{\mu}} = -\partial_{\lambda\bar{\mu}} \operatorname{Log}|g'| = -\partial_{\lambda\bar{\mu}} \operatorname{Log}(|g'||g|^{-1}|g|) = R_{\lambda\bar{\mu}} - \partial_{\lambda\bar{\mu}} \operatorname{Log} M(\varphi) \ ,$$

où

$$M(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 + \nabla_1^1\varphi & \nabla_2^1\varphi & \cdots & \nabla_m^1\varphi \\ \nabla_1^2\varphi & 1 + \nabla_2^2\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla_1^m\varphi & \cdots & & 1 + \nabla_m^m\varphi \end{vmatrix} ,$$

m étant la dimension complexe de la variété V_{2m}. $M(\varphi)$ est une fonction positive de φ car φ est C^∞ admissible, $M(\varphi)$ peut s'écrire:

$$M(\varphi) = 1 + \nabla^\nu_\nu\varphi + \frac{1}{2}[(\nabla^\nu_\nu\varphi)^2 - \nabla^{\nu\mu}\varphi\nabla_{\nu\mu}\varphi] + \cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}\begin{vmatrix} \nabla^\nu_\nu\varphi & \nabla^\nu_\mu\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\lambda\varphi \\ \nabla^\mu_\nu\varphi & \nabla^\mu_\mu\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla^\lambda_\nu\varphi & & \cdots & \nabla^\lambda_\lambda\varphi \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant ayant m lignes. En effet:

$$\begin{vmatrix} \nabla^1_1\varphi & \nabla^1_2\varphi & \cdots & \nabla^1_m\varphi \\ \nabla^2_1\varphi & \nabla^2_2\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla^m_1\varphi & & \cdots & \nabla^m_m\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nabla^\nu_\nu\varphi & \nabla^2_\nu\varphi & \cdots & \nabla^m_\nu\varphi \\ \nabla^\nu_2\varphi & \nabla^2_2\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla^\nu_m\varphi & & \cdots & \nabla^m_m\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \nabla^\nu_\nu\varphi & \nabla^\mu_\nu\varphi & \nabla^3_\nu\varphi & \cdots & \nabla^m_\nu\varphi \\ \nabla^\nu_\mu\varphi & \nabla^\mu_\mu\varphi & & & \\ \nabla^\nu_3 & & \nabla^3_3\varphi & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \nabla^\nu_m\varphi & & & \cdots & \nabla^m_m\varphi \end{vmatrix} = \cdots = \frac{1}{m!}\begin{vmatrix} \nabla^\nu_\nu\varphi & \nabla^\nu_\mu\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\lambda\varphi \\ \nabla^\mu_\nu\varphi & \nabla^\mu_\mu\varphi & & \\ & & \ddots & \\ \nabla^\lambda_\nu\varphi & & \cdots & \nabla^\lambda_\lambda\varphi \end{vmatrix}.$$

Nous supposerons dans tout ce qui suit que la variété V_{2m} est compacte. Montrons que $\int_V M(\varphi)dV = \int_V dV' = 1$. On norme la métrique $g_{\lambda\bar\mu}$ de manière que $\int_V dV = 1$.

$$\nabla^\lambda\begin{vmatrix} \nabla_\lambda\varphi & \nabla^\mu_\lambda\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\lambda\varphi \\ \nabla_\mu\varphi & \nabla^\mu_\mu\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla_\nu\varphi & \nabla^\mu_\nu\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\nu\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nabla^\lambda_\lambda\varphi & \nabla^\mu_\lambda\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\lambda\varphi \\ \nabla^\lambda_\mu\varphi & \nabla^\mu_\mu\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla^\lambda_\nu\varphi & & \cdots & \nabla^\nu_\nu\varphi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nabla_\lambda\varphi & \nabla^\lambda\nabla^\mu_\lambda\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\lambda\varphi \\ \nabla_\mu\varphi & \nabla^\lambda\nabla^\mu_\mu\varphi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \nabla_\nu\varphi & \nabla^\lambda\nabla^\mu_\nu\varphi & \cdots & \nabla^\nu_\nu\varphi \end{vmatrix}$$

$$+ (m-2) \text{ autres déterminants.}$$

Les $(m-1)$ derniers déterminants du 2ème membre sont nuls, car si on permute les 2 premières lignes, on retrouve le même déterminant, or on devrait trouver le déterminant opposé. La 1ère classe de Chern est la classe de cohomologie entrière de degré 2 sur V_{2m} de la $(1-1)$ forme

$$\phi = \frac{i}{2\pi}R_{\lambda\bar\mu}dz^\lambda(dz^\lambda \wedge dz^{\bar\mu})dz^{\bar\mu}.$$

Une $(1-1)$-forme γ de la 1ère classe de Chern est de la forme $\gamma = \psi + d\lambda$ avec $\lambda = \lambda_{(1,0)} + \lambda_{(0,1)}$ une 1-forme réelle. Les notations employées sont celles de [12]

$$d\lambda = (d' + d'')[\lambda_{(1,0)} + \lambda_{(0,1)}] = d'\lambda_{(1,0)} + [d''\lambda_{(1,0)} + d'\lambda_{(0,1)}] + d''\lambda_{(0,1)}$$

on veut que $d'\lambda_{(1,0)} = 0$ ce qui entraîne $d''\lambda_{(0,1)} = 0$, d'où $\lambda_{(1,0)} = d'\rho + h$ avec $\rho \in C^\infty$ et $d''h = 0$. De même $\lambda_{(0,1)} = d''\bar\rho + \bar h$ avec $d'\bar h = 0$. En définitive $\gamma = \psi + d''d'\rho + d'd''\bar\rho = \psi + d'd''(\bar\rho - \rho) = \psi + id'd''\xi$ avec $\xi \in C^\infty$ réelle.

A chaque élément de la 1ère classe de Chern: $(i/2\pi)C_{\lambda\bar\mu}dz^\lambda \wedge dz^{\bar\mu}$ correspond une fonction $f \in C^\infty$ telle que $C_{\lambda\bar\mu} = R_{\lambda\bar\mu} - \partial_{\lambda\bar\mu}f$.

9. Condition suffisante pour que $C_{\lambda\bar\mu}$ soit tenseur de Ricci

Théorème [3]. *Sur une variété kählerienne V_{2m} compacte, pour que tout élément de la* 1ère *classe de Chern, soit la* $(1-1)$ *forme ψ relative au tenseur de Ricci d'une certaine métrique kählerienne, il suffit que la courbure relative à tout couple de direction (λ, μ) (tel que λ soit orthogonale à μ et à sa direction conjuguée $\bar\mu$), soit positive ou nulle.*

D'après le paragraphe 8, il s'agit de mettre en évidence une fonction φ, C^∞ admissible, telle que $\theta = \mathrm{Log}\, M(\varphi) - f$ soit une constante, f étant une fonction C^∞ donnée qu'on peut prendre telle que $\int_V f dV = 0$.

Unicité de la solution [7], [8]. Si, aux métriques kähleriennes $(g_1)_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_1$ et $(g_2)_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_2$, correspondent des tenseurs de Ricci identiques $(R_1)_{\lambda\bar\mu} = (R_2)_{\lambda\bar\mu}$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{Cte}$. Faisons les calculs dans la métrique g_1. Il faut montrer que

$$\mathrm{Log}\,|g_2|\,|g_1^{-1}| = \mathrm{Log}\,[M_1(\varphi_2 - \varphi_1)] = \mathrm{Cte}$$

entraîne $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{Cte}$.

Comme $\int_V M(\varphi)dV = 1$, cela revient à montrer que $M_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ entraîne $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{Cte}$. Or $M_1(\varphi_2 - \varphi_1)$ est un déterminant qui est égal au produit de m valeurs propres positives, dont la somme est $m + g_1^{\lambda\bar\mu}\nabla_{\lambda\bar\mu}(\varphi_2 - \varphi_1)$. En conséquence

$$M_1(\varphi_2 - \varphi_1) \leq \left[1 + \frac{1}{m} g_1^{\lambda\bar\mu}\nabla_{\lambda\bar\mu}(\varphi_2 - \varphi_1)\right]^m .$$

Si $\varphi_2 - \varphi_1$ n'était pas constant, il existerait des points de la variété où $\Delta_1(\varphi_2 - \varphi_1) = -g_1^{\lambda\bar\mu}\nabla_{\lambda\bar\mu}(\varphi_2 - \varphi_1)$ serait strictement positif. En ces points $M_1(\varphi_2 - \varphi_1)$ serait inferieur à 1 strictement ce qui est en contradiction avec $M_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. D'où l'hypothèse $\varphi_2 - \varphi_1 \not\equiv \mathrm{Cte}$ est absurde.

Démonstration du théorème. Considérons $I(\varphi) = \int_V (\Delta^p\theta)^2 dV$ avec $p > m/2 + 2, \theta = \operatorname{Log} M(\varphi) - f$. Soit μ la borne inférieure de $I(\varphi)$ pour toutes les fonctions C^5 admissibles, telles que $\Delta^p\theta$ au sens des distributions soit une fonction de L_2.

Soit $\{\varphi_j\}$ une suite infinie de fonctions C^5 admissibles, telle que $\lim_{j\to\infty} I(\varphi_j) = \mu$. On prend φ_j telle que $\int_V \varphi_j dV = 0$ et telle que $I(\varphi_j) \leq I(0) = \int_V (\Delta^p f)^2 dV$. Sur le choix de la fonctionnelle $I(\varphi)$: Si l'équation

$$\theta = \text{Cte a une solution } \varphi_0\ C^\infty \text{ admissible, } I(\varphi_0) = 0 \ .$$

Et les fonctions φ telles que $I(\varphi) < \varepsilon^2$ (ε très petit) seront "voisines" de φ_0 au sens qui nous intéresse, c'est-à-dire que

$$\sup_{V \text{ et pour } \forall\xi} [|\partial_{\lambda\bar\mu}[\theta(\varphi_0) - \theta(\varphi)]\xi^\lambda\xi^{\bar\mu}|/(\xi^\nu\xi_\nu)] < \varepsilon \times \text{Cte} \ .$$

Le fait de ne considérer que les fonctions vérifiant $I(\varphi) \leq I(0)$ permet la convergence d'une sous-suite de la suite $\{\varphi_j\}$. La démonstration consiste à faire une hypothèse suffisante pour que la suite $\{\Delta\varphi_j\}$ soit uniformément bornée. $|\Delta\varphi_j| <$ Cte permet alors de montrer que les dérivées siximème des fonctions φ_j sont uniformément bornées.

Ainsi une sous-suite de la suite $\{\varphi_j\}$ converge dans C^5 vers une fonction φ_0 C^5 admissible qui réalise le minimum. L'équation d'Euler entraîne $\theta_0 =$ Cte. D'où $\varphi_0 \in C^\infty$.

a) Les fonctions $\Delta^2\theta_j$ sont continues au sens de Lipschitz uniformément.

Soit $G(P, Q) \geq 0$ la fonction de Green [6] du laplacien $\Delta = -\nabla_\nu\nabla^\nu$. $G(P, Q)$ est une fonction de $V \times V \to R, C^\infty$ sauf pour $P = Q$. Et en considérant l'équation intégrale qui permet de mettre en évidence l'existence de la fonction de Green, on montre qu'il existe une constante k telle que

$$G(P, Q) < k[r(P, Q)]^{2(1-m)}$$

et telle que

$$|G(P, R) - G(Q, R)|\,[r(P, Q)]^{-\beta} < k\{[r(P, R)]^{2(1-m)-\beta} + [r(Q, R)]^{2(1-m)-\beta}\}$$

pour $0 < \beta \leq 1, r(P, Q)$ étant la distance de P à Q au sens de la métrique $g_{\lambda\bar\mu}$. Voir aussi [5] pour l'existence et le calcul d'une constante k. Pour toute fonction ψ, dès que les intégrales existent au sens des distributions:

$$\psi(P) = \int_V \psi(Q)dV(Q) + \int_V G(P, Q)\Delta\psi(Q)dV(Q) \ .$$

D'après les propriétés de la fonction de Green:

$$\left|\phi(P) - \int_V \phi(Q)dV(Q)\right| \leq k\int_V [r(P,Q)]^{2(1-m)}\,|\Delta\phi(Q)|\,dV(Q)\ .$$

D'où, $\|\ \|_q$ étant la norme de l'espace L_q:

$$\left\|\phi(P) - \int_V \phi(Q)dV(Q)\right\|_{q'}$$
$$\leq k\sup_V \left\{\int_V [r(P,Q)]^{4m(1-m)/[2(m-1)+\varepsilon]}dV(Q)\right\}^{(2m-2+\varepsilon)/(2m)} \|\Delta\phi(Q)\|_{p'}$$
$$\leq C(\varepsilon)\,\|\Delta\phi(Q)\|_{p'}$$

pour

$$1/q' = 1/p' + [2(m-1)+\varepsilon]/(2m) - 1 = 1/p' - (2-\varepsilon)/(2m)\ ,$$

ε étant un nombre positif petit.

Nous savons que $\Delta^p\theta_j \in L_2$. D'où

$$\|\Delta^{p-1}\theta_j\|_{q_1} \leq C(\varepsilon)\,\|\Delta^p\theta_j\|_2 \quad \text{avec} \quad 1/q_1 = 1/2 - (2-\varepsilon)/(2m)$$

et pour n un entier inférieur à p:

$$\|\Delta^{p-n}\theta_j\|_{q_n} \leq C^n(\varepsilon)\,\|\Delta^p\theta_j\|_2 \quad \text{avec} \quad 1/q_n = 1/2 - (2-\varepsilon)n/(2m)\ .$$

Posons $\eta = 2(p - m/2 - 2)/(p-2)$. Comme $p > m/2 + 2$, η est positif et $1/2 - (2-\eta)(p-2)/(2m) = 0$. D'où

$$\sup_V |\Delta^2\theta_j| \leq C^{p-2}(\eta)\,\|\Delta^p\theta_j\|_2\ .$$

On a aussi

$$\text{(1a)} \qquad \sup_V |\Delta\theta_j| \leq C^{p-1}(\eta)\,\|\Delta^p\theta_j\|_2$$

et $\sup_V \left|\theta_j - \int_V \theta_j dV\right| \leq C^p(\eta)\,\|\Delta^p\theta_j\|_2$. De plus:

$$|\Delta^2\theta_j(P) - \Delta^2\theta_j(Q)|\,[r(P,Q)]^{-\eta/2}$$
$$\leq \int_V |G(P,R) - G(Q,R)|\,[r(P,Q)]^{-\eta/2}|\Delta^3\theta_j(R)|\,dV(R)\ ,$$

$$\sup_{V\times V} |\Delta^2\theta_j(P) - \Delta^2\theta_j(Q)|\,[r(P,Q]^{-\eta/2}$$
$$\leq 2k\,\|\Delta^3\theta_j\|q_{p-3}\,\sup_V \left\{\int_V [r(P,Q)^{-m(4m-4+\eta)/(2m-2+\eta)}dV(Q)\right\}^{(2m-2+\eta)/(2m)}\ ,$$

$$\text{(2a)} \qquad \sup_{V\times V} |\Delta^2\theta_j(P) - \Delta^2\theta_j(Q)|\,[r(P,Q)]^{-\eta/2} \leq \text{Cte}\ .$$

b) Il existe deux constantes positives a et b telles que

$$0 < a^2 \leq M(\varphi_j) \leq b^2 .$$

Montrons que $|\operatorname{Log} M(\varphi_j)| <$ Cte. D'après le paragraphe précédent:

$$\sup \left| \theta_j - \int_V \theta_j dV \right| \leq C^p(\eta) \, \| \Delta^p \theta_j \|_2 \leq k' ,$$

$$\sup_V \left| \operatorname{Log} M(\varphi_j) - \int_V \operatorname{Log} M(\varphi_j) dV - f \right| \leq k' .$$

Comme $\int_V M(\varphi_j) dV = 1$ (voir chapitre 8), il existe des points de V où $M(\varphi_j) = 1$, $[\operatorname{Log} M(\varphi_j) = 0]$. En ces points écrivons que l'inégalité précédente est vérifiée.

On en déduit:

$$\left| \int_V \operatorname{Log} M(\varphi_j) dV \right| < k' + \sup_V |f| .$$

D'où

$$\sup_V |\operatorname{Log} M(\varphi_j)| \leq 2(k' + \sup_V |f|), \varphi |\theta_j| < 2k' + \sup_V |f| .$$

c) L'ensemble des fonctions θ_j est borné dans C^4.

Soient $U_i (i \in I)$ une famille finie d'ouverts (homeomorphes à la boule euclidienne E_{2m}) formant un recouvrement de V_{2m}, et sur chaque ouvert un système de coordonnées locales adaptées à la structure complexe.

D'après [9], les inégalités (1a) et (2a) montrent que, pour P et Q appartenant à U_i, (λ' étant égal soit à λ soit à $\bar{\lambda}$):

$$|\partial_{\lambda'\mu'} \Delta \theta_j(P) - \partial_{\lambda'\mu'} \Delta \theta_j(Q)| \, [r(P, Q)]^{-\eta/4} < \text{Cte} .$$

Puis $|\theta_j| <$ Cte et $|\partial_{\lambda'} \Delta \theta_j(P)| <$ Cte (pour $P \in U_i$) entraîne que $(\eta/2 < \alpha < 1)$:

$$|\partial_{\lambda'\mu'} \theta_j(P) - \partial_{\lambda'\mu'} \theta_j(Q)| \, [r(P, Q)]^{-\alpha} < \text{Cte pour } P \text{ et } Q \in U_i .$$

D'où $|\Delta \partial_{\lambda'} \theta_j(P) - \Delta \partial_{\lambda'} \theta_j(Q)| \, [r(P, Q)]^{-\alpha} <$ Cte, ce qui entraîne

$$|\partial_{\lambda'\mu'\nu'} \theta_j(P) = \partial_{\lambda'\mu'\nu'} \theta_j(Q)| \, [r(P, Q)]^{-\alpha/2} < \text{Cte} .$$

Enfin

$$|\Delta \partial_{\lambda'\mu'} \theta_j(P) - \Delta \partial_{\lambda'\mu'} \theta_j(Q)| \, [r(P, Q)]^{-\eta/4} < \text{Cte}$$

entraîne que les dérivées quatrième des fonctions θ_j sont bornées et continues au sens de Lipschitz uniformément. La variété étant compacte, il existe un $\varepsilon(\varepsilon > 0)$, tel qu'à tout point $P \in V$, correspond au moins un ouvert U_i dont la frontière est à une distance de P supérieure à 2ε, P appartenant à U_i. En conséquence les estimations de Douglis et Nirenberg sont évaluées en des points dont la distance à la frontière est supérieure à ε.

Ceci justifie les inégalités précédentes.

De plus, d'après [9] et [14], comme

$$\Delta^p\theta_j \in L_2, \qquad \Delta^q\theta_j \in L_{2m/(m-2p+2q)}$$

et les dérivées qième de θ_j appartiennent à $L_{2m/(m-2p+q)}$.

d) $\Delta'_j\Delta\varphi_j \geq -A = \text{Cte}$.

Δ'_j étant le laplacien pour la métrique $(g'_j)_{\lambda\bar\mu}$. Calculons

$$\text{(3d)} \quad \begin{aligned} &\nabla_\nu(f+\theta_j) = \nabla_\nu \operatorname{Log} M(\varphi_j) = g_j'^{\alpha\bar\beta}\nabla_\nu\nabla_{\alpha\bar\beta}\varphi_j\,, \\ &\nabla^\nu_\nu(f+\theta_j) = -g_j'^{\alpha\bar\beta}g_j'^{\lambda\bar\mu}\nabla^\nu\nabla_{\alpha\bar\mu}\varphi_j\nabla_\nu\nabla_{\lambda\bar\beta}\varphi_j + g_j'^{\alpha\bar\beta}\nabla^\nu\nabla_\nu\nabla_{\alpha\bar\beta}\varphi\,, \end{aligned}$$

$$\text{(4d)} \quad \Delta'_j\Delta\varphi_j = g_j'^{\alpha\bar\beta}g_j'^{\lambda\bar\mu}\nabla^\nu\nabla_{\alpha\bar\mu}\varphi_j\nabla_\nu\nabla_{\lambda\bar\beta}\varphi_j - \Delta(f+\theta_j) + E\,.$$

En posant

$$E = -R_{\lambda\bar\mu}\nabla^\lambda_\nu\varphi_j g_j'^{\nu\bar\mu} + R_{\alpha\bar\beta\lambda\bar\mu}\nabla^{\alpha\bar\beta}\varphi_j g_j'^{\lambda\bar\mu}\,.$$

En un point P, prenons un repère orthonormé pour $g_{\lambda\bar\mu}$, tel que la matrice $\{\partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_j\}$ soit diagonale. Dans ce repère $g_j'^{\nu\bar\mu} = \delta^\nu_\mu/(1+\partial_{\nu\bar\nu}\varphi_j)$.

$$E = -\sum_\lambda R_{\lambda\bar\lambda}\frac{\partial_{\lambda\bar\lambda}\varphi_j}{1+\partial_{\lambda\bar\lambda}\varphi_j} + \sum_\lambda\sum_\mu R_{\lambda\bar\lambda\mu\bar\mu}\frac{\partial_{\lambda\bar\lambda}\varphi_j}{1+\partial_{\mu\bar\mu}\varphi_j}\,,$$

$$E = \sum_\lambda\sum_{\mu>\lambda} R_{\lambda\bar\lambda\mu\bar\mu}\frac{(\partial_{\lambda\bar\lambda}\varphi_j - \partial_{\mu\bar\mu}\varphi_j)^2}{(1+\partial_{\mu\bar\mu}\varphi_j)(1+\partial_{\lambda\bar\lambda}\varphi_j)} \geq 0$$

puisque $R_{\lambda\bar\lambda\mu\bar\mu} \geq 0$ pour $\lambda \neq \mu$. Le signe de la courbure holomorphe peut être quelconque. Comme il existe une constante A, telle que (1a):

$$\sup|\Delta(f+\theta_j)| < A, \qquad \Delta'_j\Delta\varphi_j \geq -A\,.$$

e) $\Delta\varphi_j + \sup_V|\varphi_j| > -B - D = \text{Cte}$.

$\Delta'_j\varphi_j = g_j'^{\alpha\bar\beta}g_{\alpha\bar\beta} - m$ d'où (paragraphe d):

$$\Delta'_j(\Delta\varphi_j + \varphi_j) \geq -A - m + g_j'^{\alpha\bar\beta}g_{\alpha\bar\beta}\,.$$

Il existe une constante $B > 0$ telle que $\Delta\varphi_j < -B$ entraîne $g_j'^{\alpha\bar\beta}g_{\alpha\bar\beta} > A + m$. En effet dans un repère orthonormé, si $\Delta\varphi_j < -B$ il y a au moins une direction μ pour laquelle $\partial_{\mu\bar\mu}\varphi_j > B/m$. Comme $a^2 \leq M(\varphi_j) < b^2$ (paragraphe b), il y a au moins une direction ν pour laquelle $\partial_{\nu\bar\nu}\varphi_j < -1 + (b^2m/B)^{1/(m-1)}$ et il suffit de prendre $B > mb^2(A+m)^{m-1}$. Lorsque $\Delta\varphi_j < -B$, $\Delta'_j(\Delta\varphi_j + \varphi_j) > 0$ et $\Delta\varphi_j + \varphi_j$ ne peut y atteindre un minimum, d'où

$$\Delta\varphi_j + \varphi_j > -B - \sup_V |\varphi_j| .$$

Soit $G(P,Q) \geq 0$, la fonction de Green du laplacien. Comme $\Delta\varphi_j < m$:

$$\varphi_j(P) = \int_V G(P,Q)\Delta\varphi_j(Q)dV(Q) < m\int_V G(P,Q)dV(Q) = D .$$

D'où $\Delta\varphi_j > -B - D - \sup_V |\varphi_j|$.

f) $|\Delta\varphi_j| < H = $ Cte.

Considerons l'opérateur $\Delta\varphi_j + \beta\varphi_j$ pour $\beta > 2(m+1)$ et sa fonction de Green $G_\beta(P,Q)$, G_β a les propriétés suivantes [11]:

$$\int_V G_\beta(P,Q)dV(Q) = 1/\beta, \quad G_\beta(P,Q) > 0, \quad (\Delta + \beta)G_\beta = 0;$$

$$\varphi_j(P) = \int_V G_\beta(P,Q)[\Delta\varphi_j(Q) + \beta\varphi_j(Q)]dV(Q) .$$

D'après le paragraphe e):

$$\varphi_j(P) > -\frac{1}{\beta}(B + D + \sup_V |\varphi_j|) + \beta\int_V G_\beta(P,Q)\varphi_j(\varphi)dV(Q) .$$

Iterons m fois cette inégalité, en posant

$$G^h_\beta(P,Q) = \int_V G^{h-1}_\beta(P,R)G_\beta(R,Q)dV(R) ,$$

$$\varphi_j(P) > -\frac{m+1}{\beta}(B + D + \sup_V |\varphi_j|) + \beta^{m+1}\int_V G^{m+1}(P,Q)\varphi_j(Q)dV(Q) .$$

Comme pour la fonction de Green $G(P,Q)$, il existe une constante k telle que $G_\beta(P,Q) < k[r(P,Q)]^{2-n}$, d'où après [10], $G^{m+1}_\beta(P,Q) <$ Cte.

Mais $\varphi_j < D$ (paragraphe e) entraîne, moyennant $\int_V \varphi_j dV = 0$, $\int_V |\varphi_j|\, dV < 2D$. Ainsi il existe une constante K telle que $|\varphi_j| < K + (1/2)\sup_V |\varphi_j|$, puisque $\beta > 2(m+1)$. Ainsi nous montrous que $\sup_V |\varphi_j| < 2K$ et que

$$-B - D - 2K < \Delta\varphi_j < m .$$

g) Les dérivées premières et les dérivées secondes de type $(1-1)$ des fonctions φ_j sont uniformément bornées.

$|\varphi_j| < 2K$ et $|\Delta\varphi_j| < H$ entraînent (d'après [9]):

$$|\partial_\lambda \varphi_j(P)| < \text{Cte pour } P \in U_i \text{ et avec } 0 < \alpha < 1 \,,$$
$$|\partial_\lambda \varphi_j(P) - \partial_\lambda \varphi_j(Q)|\,[r(P,Q)]^{-\alpha} < \text{Cte pour } P \text{ et } Q \in U_i \,.$$

D'autre part puisque φ_j est admissible, $|\Delta\varphi_j| < H$ et $0 < a^2 \leq M(\varphi_j) \leq b^2$ entraînent:

$$-1 + \beta^2 \stackrel{\text{def}}{=} -1 + a^2/(H+m)^{m-1} < (\partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_j \xi^\lambda \xi^{\bar\mu})/(\xi^\nu \xi_\nu) < H + m - 1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^2 - 1$$

pour tout vecteur ξ sur la variété. On en déduit que $\beta ds < ds_j < \gamma ds$, ds et ds_j étant les éléments de longueur pour g et g'_j. En intégrant le long d'une geodésique relative à g, puis le long d'une geodésique relative à g'_j on montre que:

$$\beta r(P,Q) < r_j(P,Q) < \gamma r(P,Q) \,,$$

$r_j(P,Q)$ étant la distance de P à Q au sens de la métrique g'_j. Compte tenu de ces inégalités, la variété étant compacte, il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel que pour tout point $M \in V$, l'ensemble des points P tels que $r(P,M) < \varepsilon$ (resp. $r_j(P,M) < \varepsilon$ pour $\forall$j) forme une boule $B(\varepsilon)$ (resp. $B_j(\varepsilon)$) entièrement contenue au moins dans un ouvert U_i.

h) Les dérivées troisième de type $(1-2)$ des fonctions φ_j sont uniformément bornées.

Posons $|\psi_j|^2 = g_j'^{\alpha\bar\beta} g_j'^{a\bar b} g_j'^{c\bar d} \nabla_{\alpha\bar b c}\varphi_j \nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi_j$ par convention $\nabla_{\lambda\bar\mu\alpha\bar b c}\varphi_j = \nabla_\lambda \nabla_{\bar\mu} \nabla_\alpha \nabla_{\bar b c}\varphi_j$. Calculons $\Delta'_j|\psi_j|^2$. Pour simplifier l'écriture des calculs qui suivent, on omet l'indice j.

$$\begin{aligned}
-\Delta'_j|\psi_j|^2 = g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_\lambda[&g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}(\nabla_{\bar\mu\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi + \nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\mu\bar\beta a\bar d}\varphi) \\
&- \nabla_{\bar\mu\gamma\bar\delta}\varphi\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi(2g'^{\alpha\bar\delta}g'^{\gamma\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d} + g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar\delta}g'^{\gamma\bar b}g'^{c\bar d})] \,.
\end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{aligned}
R &= \nabla_{\alpha\bar\mu\nu\bar b}\varphi\nabla_{\bar\beta c\bar\rho}\varphi\nabla_{\lambda\bar d a}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho} \,, \\
S &= \nabla_{\alpha\bar\mu\nu\bar b}\varphi\nabla_{\lambda\bar\beta c}\varphi\nabla_{\bar\rho a\bar d}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho} \,, \\
T &= \nabla_{\alpha\lambda\nu\bar b}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\nabla_{\bar\mu c\bar\rho}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho} \,, \\
W &= \nabla_{\alpha\bar\mu\nu}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\nabla_{\bar\rho c\bar\delta}\varphi\nabla_{\lambda\bar b\gamma}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho}g'^{\gamma\bar\delta} \,, \\
X &= \nabla_{\alpha\bar\mu\nu}\varphi\nabla_{\bar\beta\gamma\bar d}\varphi\nabla_{\bar\rho\lambda\bar b}\varphi\nabla_{a\bar\delta c}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho}g'^{\gamma\bar\delta} \,, \\
Y &= \nabla_{\alpha\bar\mu\nu}\varphi\nabla_{\bar\beta\gamma\bar\rho}\varphi\nabla_{\lambda\bar d a}\varphi\nabla_{\bar b c\bar\delta}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho}g'^{\gamma\bar\delta} \,, \\
Z &= \nabla_{\alpha\bar\mu\nu}\varphi\nabla_{\bar\beta\gamma\bar\rho}\varphi\nabla_{c\bar\delta a}\varphi\nabla_{\bar b\lambda\bar d}\varphi g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}g'^{\nu\bar\rho}g'^{\gamma\bar\delta} \,, \\
-\Delta'|\psi|^2 &= g'^{\lambda\bar\mu}g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}[\nabla_{\lambda\bar\mu\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi + \nabla_{\bar\mu\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\lambda\bar\beta a\bar d}\varphi + \nabla_{\lambda\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\mu\bar\beta a\bar d}\varphi \\
&\qquad + \nabla_{\alpha\bar b c}\varphi(\nabla_{\bar\mu\lambda\bar\beta a\bar d}\varphi + 2R^{\bar\nu}{}_{\bar\beta\lambda\bar\mu}\nabla_{\bar\nu a\bar d}\varphi + R^{\nu}{}_{a\lambda\bar\mu}\nabla_{\bar\beta\nu\bar d}\varphi)] \\
&\quad - g'^{\lambda\bar\mu}g'^{c\bar d}(2g'^{\alpha\bar\delta}g'^{\gamma\bar\beta}g'^{a\bar b} + g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar\delta}g'^{\gamma\bar b})\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi(\nabla_{\bar\delta\lambda\bar\mu\gamma}\varphi \\
&\quad + R^{\rho}{}_{\bar\mu\lambda\bar\delta}\nabla_{\rho\gamma}\varphi + R^{\nu}{}_{\gamma\lambda\bar\delta}\nabla_{\nu\bar\mu}\varphi) - 2\bar S - \bar R - 3\bar T - 2S - R \\
&\quad - 3T + 2X + 2Y + 4W + Y + Z + 2W \,.
\end{aligned}$$

Utilisons l'égalité (3d)

$$g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_{\lambda\bar\mu\alpha\bar\delta c}\varphi = g'^{\lambda\bar\mu}[\nabla_{\alpha\bar\delta\lambda\bar\mu c}\varphi + \nabla_\alpha(R^\rho{}_{\bar\mu\lambda\bar\delta}\nabla_{\rho c}\varphi + R^\nu{}_{c\lambda\bar\delta}\nabla_{\nu\bar\mu}\varphi) + \nabla_\lambda(R^\rho{}_{\bar\delta\bar\mu\alpha}\nabla_{\rho c}\varphi + R^\nu{}_{c\bar\mu\alpha}\nabla_{\nu\bar\delta}\varphi)] ,$$

$$g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_{\alpha\bar\delta\lambda\bar\mu c}\varphi = \nabla_{\alpha\bar\delta c}(\theta + f) + \nabla_{\alpha\rho\nu}\varphi\nabla_{\bar\delta\lambda\bar\mu c}\varphi g'^{\lambda\rho}g'^{\nu\bar\mu} + \nabla_\alpha(\nabla_{\bar\delta\nu\rho}\varphi\nabla_{\lambda\bar\mu c}\varphi g'^{\lambda\rho}g'^{\nu\bar\mu}) .$$

Et

$$g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_{\bar\delta\lambda\bar\mu\gamma}\varphi = \nabla_{\bar\delta\gamma}(\theta + f) + \nabla_{\bar\delta\lambda\rho}\varphi\nabla_{\lambda\bar\mu\gamma}\varphi g'^{\lambda\rho}g'^{\bar\mu\nu} .$$

Portons ces deux expressions, ainsi que l'expression conjuguée de la première dans $\Delta'|\phi|^2$.

$$\begin{aligned}-\Delta'|\phi|^2 = {}& g'^{\lambda\bar\mu}g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}(\nabla_{\bar\mu\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\lambda\bar\beta a\bar d}\varphi + \nabla_{\lambda\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\mu\bar\beta a\bar d}\varphi)\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}[\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\nabla_{\alpha\bar b c}(\theta + f) + \nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}(\theta + f)]\\ &+ 2\bar S + 2S + T + \bar T - 4W\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}g'^{\lambda\bar\mu}[\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi(R^\rho{}_{\bar\mu\lambda\bar b}\nabla_{\alpha\rho c}\varphi + R^\rho{}_{\bar b\bar\mu\alpha}\nabla_{\lambda\rho c}\varphi\\ &+ R^\nu{}_{c\lambda\bar b}\nabla_{\alpha\bar\mu\nu}\varphi + R^\nu{}_{c\bar\mu\alpha}\nabla_{\lambda\bar b\nu}\varphi) + \text{la même expression}\\ &\quad \text{conjuguée} + \nabla_{\alpha\bar b c}\varphi(2R^{\bar\nu}{}_{\bar\beta\lambda\bar\mu}\nabla_{\bar\nu a\bar d}\varphi + R^\nu{}_{a\lambda\bar\mu}\nabla_{\bar\beta\nu\bar d}\varphi)]\\ &+ g'^{c\bar d}g'^{\alpha\bar\beta}[\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi(g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_\lambda R^a{}_{c\bar\mu\alpha} - g'^{a\bar b}\nabla_\alpha R_{c\bar b}) + \text{la même}\\ &\quad \text{expression conjuguée}] - g'^{c\bar d}\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi[(2g'^{\alpha\bar\delta}g'^{\gamma\bar\beta}g'^{a\bar b}\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar\delta}g'^{\gamma\bar b})(\nabla_{\gamma\bar\delta}(\theta + f) - R_{\gamma\bar\delta}) + g'^{\lambda\bar\mu}(2g'^{a\bar\delta}g'^{a\bar b}R^{\bar\beta}{}_{\bar\mu\lambda\bar\delta}\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar\delta}R^{\bar b}{}_{\bar\mu\lambda\bar\delta})] - Y - 2X - (R + \bar R) - 2(S + \bar S)\\ &- 3(T + \bar T) + 6W + 2X + 3Y + Z .\end{aligned}$$

Finalement on obtient:

$$\begin{aligned}-\Delta'|\phi|^2 = {}& g'^{\lambda\bar\mu}g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}[(\nabla_{\bar\mu\alpha\bar b c}\varphi - \nabla_{\bar\mu\gamma\bar b}\varphi\nabla_{\alpha\bar\delta c}\varphi g'^{\gamma\bar\delta}) \times (\text{expression}\\ &\quad \text{conjuguée}) + (\nabla_{\lambda\alpha\bar b c}\varphi - \nabla_{\lambda\bar b\rho}\varphi\nabla_{\alpha\bar\nu c}\varphi g'^{\rho\bar\nu} - \nabla_{\lambda\bar\nu c}\varphi\nabla_{\rho\bar b c}\varphi g'^{\rho\bar\nu})\\ &\quad (\text{expression conjuguée})] - g'^{c\bar d}(2g'^{\alpha\bar\delta}g'^{\gamma\bar\beta}g'^{a\bar b}\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar\delta}g'^{\gamma\bar b})\nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi[\nabla_{\gamma\bar\delta}(\theta + f) - R_{\gamma\bar\delta}]\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}[\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi\nabla_{\alpha\bar b c}(\theta + f) + \nabla_{\alpha\bar b c}\varphi\nabla_{\bar\beta a\bar d}(\theta + f)]\\ &+ g'^{\lambda\bar\mu}g'^{\alpha\bar\beta}g'^{a\bar b}g'^{c\bar d}[\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi(R^\nu{}_{c\lambda\bar b}\nabla_{\alpha\bar\mu\nu}\varphi + R^\rho{}_{\bar b\bar\mu\alpha}\nabla_{\lambda\rho c}\varphi\\ &\qquad + R^\nu{}_{c\bar\mu\alpha}\nabla_{\lambda\bar b\nu}\varphi) + \text{l'expression conjuguée}]\\ &+ g'^{\alpha\bar\beta}g'^{c\bar d}[\nabla_{\bar\beta a\bar d}\varphi(g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_\lambda R^a{}_{c\bar\mu\alpha} - g'^{a\bar b}\nabla_\alpha R_{c\bar b})\\ &\qquad + \text{expression conjuguée}] .\end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante k telle que:

(5h) $$|\Delta'_j|\phi_j|^2 + \Gamma_j^2| \leq k^2(|\phi_j|^2 + |\phi_j|) .$$

Où on a posé Γ_j^2 égal à la somme des deux premiers carrés de l'expression de $-\Delta'_j|\phi_j|^2$. Comme les métriques g'_j sont uniformément bornées, en intégrant l'égalité (4d) après multiplication par $M(\varphi_j)$, on montre qu'il existe une constante C_1 telle que:

$$\int_V |\phi_j|^2 dV'_j < C_1 , \qquad C_1 > 1 .$$

En intégrant (5h) après multiplication par $M(\varphi_j)$ on montre que

$$\int_V \Gamma_j^2 dV'_j \leq 2C_1 k^2 .$$

Puis intégrons (5h) après multiplication par $\Delta\varphi_j M(\varphi_j)$ il vient:

$$\left|\int_V |\phi_j|^2 \Delta'_j \Delta\varphi_j dV'_j\right| \leq \sup|\Delta\varphi_j| \left[\int_V \Gamma_j^2 dV'_j + 2C_1 k^2\right] \leq 4HC_1 k^2 .$$

Compte tenu de (4d), cette inégalité montre qu'il existe C_2 tel que

$$\int_V |\phi_j|^4 dV'_j \leq C_2 .$$

Supposons qu'on ait montré qu'il existe une constante C_n telle que

$$\int_V |\phi_j|^{2n} dV'_j \leq C_n , \qquad C_n > 1 .$$

Moyennant (5h):

$$\int_V |\phi_j|^{2(n-1)}(\Delta'_j|\phi_j|^2 + \Gamma_j^2) dV'_j \leq k^2 \int_V (|\phi_j|^{2n} + |\phi_j|^{2n-1}) dV'_j \leq 2k^2 C_n .$$

Cela montre que

$$\int \Gamma_j^2 |\phi_j|^{2(n-1)} dV'_j \leq 2k^2 C_n ,$$

ainsi que

$$\int_V |\phi_j|^{2(n-2)} \nabla'^\nu |\phi_j|^2 \nabla_\nu |\phi_j|^2 dV'_j \leq \frac{2}{n-1} k^2 C_n .$$

D'où

$$\left|\int_V \Delta\varphi_j \Delta'_j |\phi_j|^{2n}\, dV'_j\right| \leq \sup_V |\Delta\varphi_j| \int_V |\Delta'_j |\phi_j|^{2n}|\, dV'_j \leq 6nHk^2C_n\ .$$

Moyennant (4d), on montre qu'il existe une constante C_{n+1} telle que

$$\int_V |\phi_j|^{2(n+1)}\, dV'_j \leq C_{n+1}\ .$$

Soit la formule de Green:

$$\Gamma(P) = \int_V H_j(P,Q)\Delta'_j\Gamma(Q)dV'_j(Q) - \int_V \Delta'_{jQ}H_j(P,Q)\Gamma(Q)dV'_j(Q)\ ,$$

où $H_j(P,Q) = f[t_j(P,Q)]/[t_j(P,Q)]^{m-1}$ avec $t_j(P,Q) = (g'_j)_{\lambda\bar{\mu}}(Q)u^\lambda u^{\bar{\mu}}$

$$(u^\lambda = z^\lambda(Q) - z^\lambda(P)\ , \qquad P \text{ et } Q \text{ appartenant à } U_i)\ ,$$

$f(x)$ étant une fonction C^∞ égale à $1/(2(m-1)s_{2m-1})$ dans un voisinage de zero et nulle pour $x > \varepsilon$ (ε étant choisi comme au paragraph g, s_{2m-1} étant l'aire de la sphère $S_{2m-1}(1)$).

$$\begin{aligned}
-\Delta'_{jQ}H_j(P,Q) &= g'^{\lambda\bar{\mu}}_j(Q)\partial_\lambda\left[\frac{\partial H_j}{\partial t}(g'_{j\nu\bar{\mu}}(Q)u^\nu + \partial_{\bar{\mu}}g'_{j\rho\bar{\nu}}(Q)u^\rho u^{\bar{\nu}})\right] \\
&= \frac{\partial^2 H_j}{\partial t^2}\Big(t_j + \partial_{\bar{\mu}}g'_{j\lambda\bar{\nu}}u^\lambda u^{\bar{\nu}}u^{\bar{\mu}} + \partial_\lambda g'_{j\nu\bar{\mu}}u^\lambda u^\nu u^{\bar{\mu}} \\
&\quad + g'^{\lambda\bar{\mu}}_j\partial_{\bar{\mu}}g'_{j\rho\bar{\nu}}\partial_\lambda g'_{j\alpha\bar{\beta}}u^\rho u^{\bar{\nu}}u^\alpha u^{\bar{\beta}}\Big) + \frac{\partial H_j}{\partial t}\Big(m + \partial_\nu \operatorname{Log}|g'_j|\, u^\nu \\
&\quad + u^{\bar{\nu}}\partial_{\bar{\nu}}\operatorname{Log}|g'_j| + \partial_\rho g'_{j\alpha\bar{\beta}}\partial_{\bar{\nu}}g'_{j\lambda\bar{\mu}}g'^{\lambda\bar{\beta}}_j g'^{\alpha\bar{\mu}}_j u^\rho u^{\bar{\nu}} - R'_{j\rho\bar{\nu}}u^\rho u^{\bar{\nu}}\Big)\ ,
\end{aligned}$$

$$\partial H_j/\partial t = f'(t)/t^{m-1} - (m-1)f(t)/t^m\ ,$$

$$\partial^2 H_j/\partial t^2 = f''(t)/t^{m-1} - 2(m-1)f'(t)/t^m + m(m-1)f(t)/t^{m+1}\ .$$

Ces trois égalités montrent qu'il existe une constante $K > 1/(2(m-1)s_{2m-1})$ telle que pour P et $Q \in U_i$:

$$|\Delta'_{jQ}H_j(P,Q)| \leq K[t_j(P,Q)]^{1/2-m}[1 + |\phi_j(Q)| + [t_j(P,Q)]^{1/2}|\phi_j(Q)|^2]\ .$$

Écrivons la formule de Green pour $\Gamma(Q) = |\phi_j(Q|^2$:

$$|\phi_j(P)|^2 = \int_V H_j(P,Q)\Delta'_j|\phi_j(Q)|^2\, dV'_j(Q) - \int_V \Delta'_{jQ}H_j(P,Q)|\phi_j(Q)|^2\, dV'_j(Q)\ .$$

Moyennant l'inégalité (5h) et les propriétés de $H_j(P,Q)$:

$$|\psi_j(P)|^2 \leq Kk^2 \int_{U_i} [t_j(P,Q)]^{1-m}[|\psi_j(Q)|^2 + |\psi_j(Q)|]dV'_j(Q)$$
$$+ K \int_{U_i} [t_j(P,Q)]^{1/2-m}[|\psi_j(Q)|^2 + |\psi_j(Q)|^3$$
$$+ [t_j(P,Q)]^{1/2}|\psi_j(Q)|^4]dV'_j(Q) .$$

Ainsi il existe une constante K' telle que:

$$\sup_V |\psi_j|^2 \leq K'(\|\psi_j^2\|_{2m} + \|\psi_j\|_{2m} + \|\psi_j^4\|_{2m} + \|\psi_j^2\|_{3m} + \|\psi_j^3\|_{3m})$$

car $\dfrac{1}{2m} + \dfrac{m-1}{m} - 1 < 0$ et car $\dfrac{1}{3m} + \dfrac{m-1/2}{m} - 1 < 0$.

Comme il existe une contante $K'' > 1$ telle que

$$\int_V |\psi_j|^{9m}\, dV'_j \leq K'' : \quad \sup_V |\psi_j|^2 \leq 6K'K'' = \text{Cte} .$$

Les derivées troisième de type $(1-2)$ des fonction φ_j sont uniformément bornées.

i) L'ensemble des fonctions φ_j est borné et équicontinu dans C_4.

Les dérivées troisième de type $(1-2)$ étant bornées uniformément, pour $P \in U_i$: $|\partial_\lambda \Delta\varphi_j(P)| <$ Cte. Cela entraîne (voir paragraphe c) que, pour P et $Q \in U_i$,

(6i) $\quad |\partial_{\lambda'\mu'}\varphi_j(P) - \partial_{\lambda'\mu'}\varphi_j(Q)|\,[r(P,Q)]^{-\alpha} < B = \text{Cte} \quad$ avec $\quad 0 < \alpha < 1$.

D'autre part:

$$\int_V \Delta'_{jQ} H_j(P,Q)dV'_j(Q) = -1 .$$

En effet il suffit de faire $\Gamma(Q) =$ Cte dans la formule de Green.

Ainsi h étant une constante:

$$\text{(7i)} \quad \begin{aligned} \partial_{\lambda'}\Gamma(P) = & \int_V \partial_{\lambda' P} H_j(P,Q)\Delta'_j\Gamma(Q)dV'_j(Q) \\ & - \int_V \partial_{\lambda' P}\Delta'_{jQ} H_j(P,Q)[\Gamma(Q) - h]dV'_j(Q) . \end{aligned}$$

Comme $\sup_V |\psi_j|^2 \leq$ Cte, d'après les calculs faits au paragraphe précédent, il existe une constante C telle que:

$$
(8\mathrm{i})\quad
\begin{aligned}
&H_j(P,Q) \le C[t_j(P,Q)]^{1-m}; \quad |\partial_{\lambda_P} H_j(P,Q)| \le C[t_j(P,Q)]^{1/2-m};\\
&|\partial_{\lambda_P} H_j(P,Q) - \partial_{\lambda_R} H_j(R,Q)|\,[r(P,R)]^{-\alpha}\\
&\qquad \le C\{[t_j(P,Q)]^{(1-\alpha)/2-m} + [t_j(R,Q)]^{(1-\alpha)/2-m}\};\\
&|\Delta'_{jQ} H_j(P,Q)| \le C[t_j(P,Q)]^{1/2-m}; \quad |\partial_{\lambda_P} \Delta'_{jQ} H_j(P,Q)| < C[t_j(P,Q)]^{-m};\\
&|\partial_{\lambda_P} \Delta'_{jQ} H_j(P,Q) - \partial_{\lambda_R} \Delta'_{jQ} H_j(R,Q)|\,[r(P,Q)]^{-\alpha}\\
&\qquad \le C\{[t_j(P,Q)^{-m-\alpha/2} + [t_j(R,Q)]^{-m-\alpha/2}\};
\end{aligned}
$$

pour P, Q et R appartenant à U_i et $0 < \alpha < 1$.

Dérivons deux fois l'égalité $\mathrm{Log}\,|g'_j| = \mathrm{Log}\,|g| + f + \theta_j$,

$$
(9\mathrm{i})\quad
\begin{aligned}
g'^{\nu\bar\mu}_j \partial_{\lambda'} g'_{j\nu\bar\mu} &= \partial_{\lambda'} \mathrm{Log}\,|g| + \partial_{\lambda'}(f + \theta_j)\,,\\
g'^{\nu\bar\mu}_j \partial_{\nu\bar\mu} \partial_{\lambda'\rho'} \varphi_j &= \partial_{\lambda'\rho'} \mathrm{Log}\,|g| + \partial_{\lambda'\rho'}(f + \theta_j)\\
&\quad - \partial_{\rho'} g'^{\nu\bar\mu}_j \partial_{\lambda'} g'_{j\nu\bar\mu} - g'^{\nu\bar\mu}_j \partial_{\lambda'\rho'} g_{\nu\bar\mu}\,.
\end{aligned}
$$

D'où pour $P \in U_i$, $|\Delta'_j \partial_{\nu'\rho'} \varphi_j(P)| <$ Cte. Écrivons (7i) pour $\Gamma(Q) = \partial_{\nu'\rho'}\varphi_j(Q)$ et $h = \partial_{\nu'\rho'}\varphi_j(P)$. Compte tenu de (6i) et de (8i): $[t_j(P,Q) > \beta^2 r^2(P,Q)$, $\beta =$ Cte.],

$$
\begin{aligned}
|\partial_{\lambda'\nu'\rho'}\varphi_j(P)| &\le C\,\sup_{U_i} |\Delta'_j \partial_{\nu'\rho'}\varphi_j| \int_{U_i} [t_j(P,Q)]^{1/2-m} dV'_j(Q)\\
&\quad + \frac{CB}{\beta^\alpha} \int_{U_i} [t_j(P,Q)]^{\alpha/2-m} dV'_j(Q)\,.
\end{aligned}
$$

Les dérivées troisième des fonctions φ_j sont uniformément bornées. De même on montre que:

$$
|\partial_{\lambda'\nu'\rho'}\varphi_j(P) - \partial_{\lambda'\rho'\nu'}\varphi_j(Q)|\,[r(P,Q)]^{-\alpha/2} \le B' = \mathrm{Cte} \qquad \text{pour } P \text{ et } Q \in U_i\,.
$$

D'après le paragraphe h:

$$
\int_V \Gamma_j^2 dV'_j < \mathrm{Cte}\,.
$$

Cela montre que les dérivées quatrième des fonctions φ_j de type $(1-3)$ et de type $(2-2)$ appartiennent à L_2 uniformément.

Dérivons à nouvean (9i) dans U_i:

En posant $D_j(Q) = \sum_{\lambda'} \sum_{\rho'} \sum_{\nu} \sum_{\bar\mu} |\partial_{\lambda'\rho'\nu\bar\mu}\varphi_j(Q)|$ on voit que:

$$
|\Delta'_j \partial_{\rho'\mu'\nu'}\varphi_j(Q)| < C'[D_j(Q) + 1],\ C' \text{ étant une constante}\,.
$$

Faisons dans (7i), $\Gamma(Q) = \partial_{\rho'\mu'\nu'}\varphi_j(Q)$ et $h = \partial_{\rho'\mu'\nu'}\varphi_j(P)$:

$$|\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j(P)| \leq C'C\int_{U_i}[t_j(P,Q)]^{1/2-m}[D_j(Q)+1]dV'_j(Q)$$
$$+\frac{CB'}{\beta^{\alpha/2}}\int_{U_i}[t_j(P,Q)]^{\alpha/4-m}dV'_j(Q)\ .$$

D'où il existe une constante $C''>1$ telle que pour tout $r\geq 1$, les intégrales definissant les normes étant restreinte à U_i:

$$\|\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j\|_{q_r} < C''\Big(1+\sum_{\lambda'}\sum_{\rho'}\sum_{\nu}\sum_{\bar\mu}\|\partial_{\lambda'\rho'\nu\bar\mu}\varphi_j\|_{q_{r-1}}\Big),$$

avec

$$\frac{1}{q_r}=\frac{1}{q_{r-1}}=\frac{m-1/2+1/4}{m}-1=\frac{1}{q_{r-1}}-\frac{1}{4m}=\frac{1}{q_0}-\frac{r}{4m}\ .$$

Prenons $q_0=2$ et $r=2m$ il vient:

$$\sup|\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j|\leq C''\frac{(4m^4C'')^{2m-2}-1}{4m^4C''-1}+(4m^4C'')^{2m-2}\|D_j\|_2\leq \text{Cte}\ .$$

De même ou montre que:

$$|\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j(P)-\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j(Q)|\,[r(P,Q)]^{-\alpha/4}\leq \text{Cte}$$

pour P et Q appartenant à U_i.

j) L'ensemble des fonctions φ_j est borné dans C^6, les dérivées $2(p+1)$ième des fonctions φ_j appartiennent à L_2.

Maintenant nous savons que les composantes des tenseurs de courbure des métriques g'_j sont bornées et continues au sens de Lipschitz uniformément. Nous pouvons utiliser les résultats de [9].

Les résultats du paragraphe précédent et (9i) dérivée montrent que:

$$|\Delta'_j\partial_{\lambda'\mu'\nu'}\varphi_j(P)-\Delta'_j\partial_{\lambda'\mu'\nu'}\varphi_j(Q)|\,[r_j(P,Q)]^{-\alpha/4}\leq \text{Cte}\ .$$

Cela entraîne que les dérivées cinquième des fonctions φ_j sont bornées et continues au sens de Lipschits uniformément. D'où

$$|\Delta'_j\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j(P)-\Delta'_j\partial_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}\varphi_j(Q)|\,[r_j(P,Q)]^{-\gamma/6}\leq \text{Cte}$$

moyennant les résultats du paragraphe C. Ceci montre que les dérivées sixième sont bornées et continues au sens de Lipschitz uniformément.

Supposons qu'on ait montré que les dérivées $(q+1)$ième de φ_j (notées $\partial^{q+1}\varphi_j$) appartiennent à $L_{2m/(m-2p+q-1)}$. Dérivons (9i) $(q-2)$ fois $2p\geq q>4$. On voit que $\Delta'_j(\partial^q\varphi_j)\in L_{2m/(m-2p+q)}$, car $\partial^q\varphi_j\in L_{2m/(m-2p+q)}$ (paragraphe C). D'où d'après

[9] et [14] les dérivées $\partial^{q+1}\varphi_j$ satisfont à une condition de Lipschitz d'ordre α localement dans $L_{2m/(m-2p+q-1+\alpha)}$. D'où les dérivées $\partial^{q+2}\varphi_j$ appartiennent à $L_{2m/(m-2p+q)}$. La recurrence est établie, $\partial^{2p+2}\varphi_j \in L_2$.

k) La borne inférieure est atteinte par une fonction φ_0, C^∞ admissible, $\theta_0 = \text{Cte}$.

Comme l'ensemble des fonctions φ_j est borné dans C^6, il existe une sous suite de la suite $\{\varphi_j\}$, (notée encore $\{\varphi_j\}$), telle que $\{\varphi_j\}$ converge uniformément dans C^5 vers $\varphi_0 \in C^5$ admissible. φ_0 vérifie l'équation $\operatorname{Log} M(\varphi_0) = \theta_0 + f$, la suite $\{\theta_j\}$ converge vers $\theta_0 \in C^3$ uniformément dans C^3. La distribution $\Delta^p\theta_0$ est une fonction de L_2. En effet pour toute fonction $\psi \in C^\infty$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_V (\Delta^p\theta_j - \Delta^p\theta_0)\psi dV = 0$$

puisque θ_j converge uniformément vers θ_0. D'où

$$\left|\int_V (\Delta^p\theta_0)\psi dV\right| \leq \lim_{j\to\infty} \|\Delta^p\theta_j\|_2 \|\psi\|_2 = \sqrt{\mu}\, \|\psi\|_2 \,.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'inégalité précédent vraie pour $\psi \in C^\infty$ est vraie pour $\psi \in L_2$. D'où $\Delta^p\theta_0 \in L_2$ et $\|\Delta^p\theta_0\|_2^2 \leq \mu$. Donc φ_0 appartient à notre ensemble initial de fonctions.

Par conséquent $I(\varphi_0) = \mu$. φ_0 réalise le minimum. Pour toute fonction $\psi \in C^\infty$ avec $\int_V \psi dV = 0$, on vérifie que $\varphi_0 + \lambda\psi$ appartient à notre ensemble initial de fonctions, λ décrivant un voisinage suffisamment petit de zero. D'où

$$\int_V \Delta^p\theta_0(\Delta^p\Delta_0'\psi)dV = 0 \,,$$

Δ_0' étant le laplacien pour la métrique $g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_0$. En effet $\theta(\varphi_0 + \lambda\psi) = \operatorname{Log}|g'(\varphi_0 + \lambda\psi)||g^{-1}|$ et partie linéaire en λ de $\theta(\varphi_0 + \lambda\psi) = \lambda g_0'^{\lambda\bar\mu}\partial_{\lambda\bar\mu}\psi$ l'équation d'Euler $\Delta_0'[\Delta^{2p}\theta_0/M(\varphi_0)] = 0$ est vérifiée sur toute la variété: θ_0 est une constante. Le minimum est nul et φ_0 vérifie l'équation

$$\operatorname{Log} M(\varphi_0) = f - \operatorname{Log} \int_V e^f dV \,.$$

D'où, d'après la méthode du paragraphe j, $\varphi_0 \in C^\infty$.

10. Condition suffisante d'existence d'une métrique d'Einstein

a) Dans ce paragraphe nous supposons que, sur la variété kählérienne compacte V_{2m}, la 2-forme $-i/(2\pi)g_{\lambda\bar\mu}dz^\lambda \wedge dz^{\bar\mu}$ appartient à la 1ère classe de

Chern. C'est-à-dire qu'il existe une fonction réelle $f \in C^\infty$ telle que $R_{\lambda\bar\mu} = -g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu} f$. Posons $g'_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi$ vec φ C^∞ admissible et considérons l'intégrale:

$$\mathscr{T}(\varphi) = \int_V (\Delta^p \Gamma)^2 dV \quad \text{avec } \Gamma = \operatorname{Log} M(\varphi) - \varphi - f \text{ et } p > m/2 + 2 \,.$$

Soit μ la borne inférieure de $\mathscr{T}(\varphi)$ pour toutes les fonctions C^5 admissibles telles que $\Delta^p \Gamma$ au sens des distributions soit une fonction de L_2.

b) Si la borne inférieure est atteinte par une fonction φ_0 C^5 admissible le minimum est nul.

En effet dans ces conditions, pour toutes fonction $\psi \in C^\infty$

$$\int_V (\Delta^p \Gamma_0)[\Delta^p(\Delta'_0 \psi + \psi)] dV = 0 \,.$$

L'équation d'Euler $\Delta'_0[\Delta^{2p}\Gamma_0/M(\varphi_0)] + \Delta^{2p}\Gamma_0/M(\varphi_0) = 0$ est vérifiée sur toute la variété. Ce qui entraîne $\Gamma_0 = \text{Cte}$, le minimum est nul.

c) **Théorème** [4]. *Lorsque la* 2*-forme* $\dfrac{-i}{2\pi} g_{\lambda\bar\mu} dz^\lambda \wedge dz^{\bar\mu}$ *appartient à la* 1*ére classe de Chern, pour qu'il existe sur la variété kählerienne* V_{2m} *compacte une métrique d'Einstein,il suffit que la courbure relative à tout couple de directions* (λ, μ) [*tel que* λ *soit orthogonal à* μ *et à sa direction conjuguée* $\bar\mu$] *soit positive ou nulle.*

Démonstration. Soit $\{\varphi_j\}$ une suite de fonctions C^5 admissibles telles que $\mathscr{T}(\varphi_j) \leq \mathscr{T}(0)$, $\int_V \varphi_j dV = 0$ et telles que $\lim_{j \to \infty} \mathscr{T}(\varphi_j) = \mu$. Nous allons montrer qu'il existe deux constantes positives a et b telles que $-1 + a < \dfrac{\partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_j \xi^\lambda \xi^{\bar\mu}}{\xi^\alpha \xi_\alpha} < b$ pour $\forall \xi$. Ainsi une sous-suite $\{\varphi_j\}$ convergera dans C^5 vers une fonction φ_0 C^5 admissible que réalise le minimum (voir le paragraphe 9).

D'après b) le minimum est nul, $\varphi_0 \in C^\infty$ et $\Gamma_0 = \operatorname{Log} M(\varphi_0) - \varphi_0 - f = \text{Cte}$ d'où

$$R'_{0\lambda\bar\mu} = R_{\lambda\bar\mu} - \partial_{\lambda\bar\mu} \operatorname{Log} M(\varphi_0) = -g_{\lambda\bar\mu} - \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_0 = -g'_{0\lambda\bar\mu} \,.$$

d) Les dérivées secondes des fonctions φ_j sont uniformément bornées.

D'apres le paragraphe 9, il existe une constante A telle que

$$|\Delta \operatorname{Log} M(\varphi_j) - \Delta\varphi_j| < A \,.$$

D'où

$$\Delta \operatorname{Log} M(\varphi_j) < A + \Delta\varphi_j < A + m \,,$$

$$\operatorname{Log} M[\varphi_j(P)] = \int_V \operatorname{Log} M[\varphi_j(Q)]dV(Q)$$
$$+ \int_V G(P, Q)\Delta \operatorname{Log} M[\varphi_j(Q)]dV(Q) ,$$

$$\operatorname{Log} M[\varphi_j(P)] < 1 + (A + m)\int_V G(P, Q)dV(Q) = C ,$$

une constante, car

$$\int_V \operatorname{Log} M(\varphi_j)dV < \int_V M(\varphi_j)dV = 1 .$$

D'après les propriètés de la courbure:

$$\Delta'_j\Delta\varphi_j \geq - \Delta \operatorname{Log} M(\varphi_j) \geq -A - \Delta\varphi_j > -A - m .$$

Il existe une constante B telle que $\Delta\varphi_j < -B$ entraîne:

$$g_j'^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} > 2m + A \quad \text{car} \quad M(\varphi_j) < e^c .$$

Loresque

$$\Delta\varphi_j < -B , \qquad \Delta'_j[\Delta\varphi_j + \varphi_j] > -A - 2m + g_j'^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} > 0$$

et $\Delta\varphi_j + \varphi_j$ ne peut pas y atteindre un minimum. Comme au paragraphe 9, on montre que cela entraîne qu'il existe une constante K telle que $|\varphi_j| < K$ et $\Delta\varphi_j > -K$.

e) Comme il existe une constante k telle que $\operatorname{Log} M(\varphi_j) - \varphi_j > -k$, $\operatorname{Log} M(\varphi_j) > -k - \sup|\varphi_j| > -k - K$, et comme $\Delta\varphi_j > -K$, il existe deux constantes positives a et b telles que:

$$-1 + a < \frac{\partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_j\xi^\lambda\xi^{\bar\mu}}{\xi^\nu\xi_\nu} < b \qquad \text{pour } \forall\xi \quad \text{et} \quad \forall j .$$

11. Sur la 1ère classe de Chern des variétés kähleriennes compactes

Conjecture. *Sur une variété kählerienne V_{2m} compacte, tout élément de la 1ère classe de Chern peut-être approchée aussi près qu'on veut (au seus de la métrique initiale) par la 2-forme relative au tenseur de Ricci d'une certaine métrique kählerienne.*

Soit $g_{\lambda\bar\mu}$ la métrique kählerienne initiale. Considérons la métrique $g'_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi$ avec φ C^∞ admissible. Soit $C_{\lambda\bar\mu} = R_{\lambda\bar\mu} - \partial_{\lambda\bar\mu}f$ un élément de la 1ère classe de Chern. Il s'agit de mettre en évidence une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions C^∞ admissibles, telle que les dérivées secondes de la suite $\{\operatorname{Log} M(\varphi_n)\}$ convergent uniformément vers les dérivées secondes de f.

a) Considérons $I(\varphi)=\int_V (\Delta^p\theta)^2 dV$ avec $p>m/2+2$ et $\theta=\operatorname{Log} M(\varphi)-f$. Soit $\mu(\xi)$ la borne inférieure de $I(\varphi)$ lorsque φ parcourt l'ensemble $\mathscr{C}(\xi)$ des fonctions C^5 telles que:

$$\inf_{\substack{V \\ \text{et pour } \forall\eta}} \frac{\partial_{\lambda\bar\mu}\varphi\eta^\lambda\eta^{\bar\mu}}{\eta^\alpha\eta_\alpha} \geq -1+\xi\ , \qquad 0<\xi<1\ .$$

Montrons que la borne inférieure est atteinte pour une fonction $\varphi_\xi \in C^5$. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathscr{C}(\xi)$, telle que $\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n)=\mu(\xi)$ avec $I(\varphi_n)\leq I(0)$ et $\int_V \varphi_n dV=0$.

Comme au paragraphe 9, $p>m/2+2$ et $I(\varphi_n)\leq I(0)$ entraîne qu'il existe deux constantes a et b indépendantes de ξ, telles que $0<a^2\leq M(\varphi_n)\leq b^2$.

De plus $|\Delta^2\theta_n|<$ Cte: une sous-suite $\{\theta_n\}$ converge ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 uniformément vers $\theta_\xi \in C^3$. $\varphi_n \in \mathscr{C}(\xi)$ et $M(\varphi_n)\leq b^2$ entraînent que les dérivées secondes des fonctions φ_n sont uniformément bornées. Une sous-suite $\{\varphi_n\}$ converge uniformément vers une fonction $\varphi_\xi \in C^1$ admissible, aux dérivées secondes bornées.

Ainsi φ_ξ est C^1 admissible et vérifie l'équation $\operatorname{Log} M(\varphi_\xi)=\theta_\xi+f \in C^3$, d'où $\varphi_\xi \in C^5$ et comme

$$\int_V (\Delta^p\theta_\xi)^2 dV \leq \lim_{n\to\infty}\int_V (\Delta^p\theta_n)^2 dV=\mu(\xi)\ ,$$

φ_ξ réalise le minimum: $I(\varphi_\xi)=\mu(\xi)$.

b) Soit $E(\xi)$ l'ensemble des points où pour un vecteur η, $\dfrac{\partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_\xi\eta^\lambda\eta^{\bar\mu}}{\eta^\alpha\eta_\alpha}=-1+\xi$. Lorsque $\xi\to 0$, la mesure de $E(\xi)$ tend vers zero, car $\|\Delta\varphi_\xi\|_1<2m$ puisque φ_ξ est admissible et car $M(\varphi_n)\geq a^2$. En effet en prenant $\int_V dV=1$ on a:

$$\int_{E(\xi)} dV < \frac{2m}{(a^2/\xi)^{1/(m-1)}-m}\ .$$

Soit une suite strictement décroissante de nombre ξ_j, telle que $\lim_{j\to\infty}\xi_j=0$. Pour un certain j soit φ_j une fonction qui rend minimum $I(\varphi)$ dans les conditions indiquées précédement.

Considérons ξ_{j+1} et les fonctions $\varphi=\varphi_j+\beta$ avec $\beta\in C^5, \beta\equiv 0$ sur $V-E_j$ et $\varphi\in\mathscr{C}(\xi_{j+1})$. La borne inférieure $\mu(\xi_{j+1})$ de $I(\varphi_j+\beta)$ est atteinte par une fonction $\varphi_{j+1} \in C^5$ et quelque soit la fonction ψ (à condition que celle-ci soit telle que $\varphi_{j+1} + \lambda\psi \in \mathscr{C}(_{j+1})$, λ parcourant un voisinage de zero):

$$\int_V (\varDelta^p \theta_{j+1})(\varDelta^p \varDelta'_{j+1}\psi) dV = 0 ,$$

$\varDelta'_{j+1}\psi$ étant le laplacien de ψ dans la métrique kählerienne $(g'_{j+1})_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_{j+1}$.

En procédant de cette manière, on met en évidence une suite $\{\varphi_j\}$ de fonctions C^5 admissibles, telle que $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$, φ ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre 5 sur $V - \lim\limits_{\xi\to 0} E(\xi)$.

c) Posons $\theta = \lim\limits_{\xi\to 0} \theta_\xi$, $\theta \in C^3$ et quelque soit ψ (à condition que $\varphi + \lambda\psi$ soit telle que

$$\inf_{\substack{V\\ \text{et pour } \forall \eta}} \frac{\partial_{\lambda\bar\mu}(\varphi + \lambda\psi)\eta^\lambda \eta^{\bar\mu}}{\eta^\alpha \eta_\alpha} \geq -1 ,$$

λ parcourant un voisinage de zero):

$$\int_V (\varDelta^p \theta)(\varDelta^p \varDelta'\psi) dV = 0 ,$$

$\varDelta'$ étant le laplacien pour la métrique $g'_{\lambda\bar\mu} = g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi$ sur $V - \lim\limits_{\xi\to 0} E(\xi)$.

Si $\varDelta^{2p}\theta$ n'éntait pas identiquement nul, on pourrait mettre en évidence une fonction γ, vérifiant $\int_V \gamma M(\varphi) dV = 0$, nulle dans un voisinage de $E = \lim\limits_{\xi\to 0} E(\xi)$ et telle que:

$$\int_V \gamma \varDelta^{2p}\theta dV \neq 0 .$$

Considérons la solution ψ_j de l'équation $\varDelta'_j \psi_j = \gamma + \mu_j$ (μ_j étant une constante nulle pour j suffisamment grand $j > J$, car γ est nulle sur un voisinage de E). Montrous que $\int_V |\psi_j|\, dV$ est uniformément borné. $C > 0$ étant une constante:

$$\left(\int_V |\psi_j|\, dV\right)^2 < c\left(\int_V \sqrt{\varDelta^\nu \psi_j \nabla_\nu \psi_j}\, dV\right)^2 < \frac{3mc}{a^2} \int \nabla'^\nu_j \psi_j \nabla_\nu \psi_j dV'_j$$

$$< \frac{3mc}{a^2} \sup |\gamma + \mu_j| \int_V |\psi_j|\, dV_j ,$$

car $\|\varDelta\varphi_j\|_1 < 2m$ et $a^2 \leq M(\varphi_j) \leq b^2$. D'où

$$\int_V |\psi_j|\, dV < \frac{3mcb^2}{a^2} \sup|\gamma + \mu_j| < \text{Cte} .$$

En appliquant la formule de Green, considérant l'équation $\Delta'_j\psi_j = \gamma + \mu_j$ à l'intérieur d'une boule $B_j(\rho)$, munie de coordonnées normales géodésiques polaires, ρ suffisamment petit pour que $B_j(\rho)$ existe, on montre que ψ_j vérifie une équation du type:

$$\psi_j(P) = \frac{-1}{2(m-1)s_{2m-1}} \left\{ \int_{B_j(\rho)} \left[\Delta'_{jQ}\left(\frac{f(r_j)}{r_j^{2(m-1)}}\right)\psi_j(Q)\right] dV'_j(Q) - \int_{B_j(\rho)} \frac{f(r_j)}{r_j^{2(m-1)}}[\gamma(Q) + \mu_j]\, dV'_j(Q)\right\} ,$$

$r_j(P, Q)$ étant la distance de P à Q au sens de la métrique $g_{\lambda\bar\mu} + \partial_{\lambda\bar\mu}\varphi_j$, $f(r_j) \in C^\infty$ est égale à 1 au voisinage de $r_j = 0$, décroit et s'annule pour $r_j \geq \rho$, s_{2m-1} est l'aire de $S_{2m-1}(1)$.

Pour $P_0 \in V - E$, soit $\varepsilon(P_0)$ le plus grand des nombres telle que: distance de P_0 à E au sens de $(g_j)_{\lambda\bar\mu} \geq \varepsilon(P_0)$, pour $\forall j$. Il existe $\rho < \varepsilon(P_0)/(m+1)$ tel que pour $\forall P \in V - E$ avec $\varepsilon(P) \geq \varepsilon(P_0)$ les boules $B_{jP}[(m+1)\rho]$ existent pour $\forall j$. Pour $\forall P$ avec $\varepsilon(P) \geq \varepsilon(P_0)$, il existe alors deux constantes A et B telles que

$$|\psi_j(P)| < A \int_V \frac{|\psi_j(Q)|\, dV_j(Q)}{[r_j(P, Q)]^{2m-2}} + B .$$

Iterons m fois cette inégalité, on trouve $|\psi_j(P)| < E \int_V |\psi_j(Q)|\, dV(Q) + F$, E et F étant des constantes. Comme $\int_V |\psi_j|\, dV < \text{Cte}$, $\psi_j(P)$ est uniformément borné pour tout $P \in V$ tel que $\varepsilon(P)$ soit superieur à un nombre positif fixé à l'avance.

En derivant la formule de Green, et en procédant de la même manière, on montre qu'une sous-suite $\{\psi_j\}$ converge uniformément ainsi que les dérivées premières et secondes vers une fonction ψ sur tout compact inclu dans $V - E$. $\psi = \lim_{j\to\infty} \psi_j$ vérifie l'équation $\Delta'\psi = \gamma$. Pour $j > J$, ψ_j est une fonction harmonique pour la métrique $g_{j\lambda\bar\mu}$ dans un voisinage de E, $|\psi_j|$ n'atteint pas un vrai maximum en dehors du support de γ qui est inclu dans un compact exterieur à E. Par suite les fonctions ψ_j sont uniformément bornées sur V et ψ est borné.

d) Supposons qu'on puisse mettre en évidence une fonction γ avec les propriétés précédemment définies $\left(\text{en particulier } \int_V \gamma\Delta^{2p}\theta\, dV \neq 0\right)$, de telle sorte que les fonctions ψ_j solutions des équations $\Delta'_j\psi_j = \gamma + \mu_j$, aient des dérivées secondes uniformément bornées (les dérivées secondes de ψ_j étant calculées dans un repère de coordonnées normales pour la métrique $g_{j\lambda\bar{\mu}}$). Alors $\psi = \lim_{j\to\infty} \psi_j$ aurait des dérivées secondes bornées pour la métrique $g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi$. C'est dire qu'il existerait une constante k telle que pour $\forall i, \nabla_i^i\psi/(1 + \nabla_i^i\varphi) \leq k$ sur $V - E$. Par conséquent la fonction $\varphi + \lambda\psi$ pour $\lambda < 1/k$ serait telle que pour $\forall\eta$,

$$\partial_{\lambda\bar{\mu}}(\varphi + \lambda\psi)\eta^\lambda\eta^{\bar{\mu}}/(\eta^\alpha\eta_\alpha) \geq -1 \qquad \text{sur } V .$$

On aurait ainsi mis en évidence une contradiction, puis qu'on aurait

$$\int_V \Delta^p\theta\Delta^p\gamma dV \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_V \Delta^p\theta\Delta^p\Delta^\prime\psi dV = 0 .$$

Cela entraînerait que $\Delta^{2p}\theta$ est identiquement nul, que θ est constant, que la borne inférieure est nul: $\lim_{\xi\to 0} \mu(\xi) = 0$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existerait une fonction F C^∞ admissible, vérifiant

$$\int_V [\Delta^p (\operatorname{Log} M(F) - f)]^2 dV < \varepsilon^2 ,$$

ce qui entraîne

$$\sup_V |\partial_{\mu\bar{\mu}} (\operatorname{Log} M(F) - f)| < K\varepsilon ,$$

K étant une constante.

En prenant p suffisamment grand, on pourrait mettre en évidence une suite de fonctions F_n C^∞ admissibles, telle que $\{\operatorname{Log} M(F_n)\}$ converge uniformément vers f, ainsi que les dérivées jusqu'à l'ordre r (r quelconque mais fini). En conclusion, la conjecture de Calabi "Sur une variété kählerienne compacte, toute $1 - 1$ forme de la 1ère classe de Chern est forme de Ricci pour une certaine métrique kählerienne" est vraie, nous l'avous montré, moyennant l'hypothèse de courbure mentionnée au paragraphe 9.

Mais dans le cas général, l'étude de l'intégrale $I(\varphi)$, nous incite à faire la conjecture plus faible: toute $1 - 1$ forme de la 1ère classe Chern peut-être approchée aussi près qu'on veut par une forme de Ricci.

Bibliographie

[1] T. Aubin, *Sur la courbure scalaire des variétés riemanniennes compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966) 130–133.

[2] ——, *Sur la courbure conforme des variétés riemanniennes*, C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966) 391–393.

[3] ——, *Sur la* 1re *classe de Chern des variétés kählériennes compactes à courbure positive ou nulle*, C. R. Acad. Sci. Paris **264** (1967) 512–514.

[4] ——, *Variétés kähleriennes et métriques d'Einstein*, C. R. Acad. Sci. Paris **264** (1967) 757–760.
[5] ——, *Fonction de Green du laplacien*, C. R. Acad. Sci. Paris **226** (1968) 1057–1059.
[6] P. Bidal & G. de Rham, *Les formes différentielles harmoniques*, Comment. Math. Helv. **19** (1946–47) 1–49.
[7] E. Calabi, *The space of Kähler metrics*, Proc. Internal. Congress Math. Amsterdam, 1954, Vol. 2, 206–207.
[8] ——, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class*, Algebraic geometry and topology, A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, 1955, 78–89.
[9] A. Douglis & L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955) 503–538.
[10] G. Giraud, *Sur le problème de Dirichlet généralisé*, Ann. Sci. École Norm Sup. **46** (1929) 131–245.
[11] S. Itô, *Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems*, Japan. J. Math. **27** (1957) 55–102.
[12] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma, 1955.
[13] ——, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963) 7–9.
[14] S. L. Sobolev, *Sur un théorème de l'analyse fonctionnello* (Russian, French summary), Mat. Sb. (N. S.) **4** (**46**) (1938) 471–496.
[15] N. S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968) 265–274.
[16] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960) 21–37.

UNIVERSITÉ DE LILLE